

Einführung in die Algebra

Blatt 12

Abgabe: 16.07.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Weiter sei $E = K(S)$ der Quotientenkörper des Polynomringes $K[S]$ in der Variablen S . Zeigen Sie: das Polynom $T^p - S \in E[T]$ ist irreduzibel und nicht separabel.

Aufgabe 2.

Es sei $F|E$ ein Erweiterungskörper mit $u, v \in F$. Zeigen Sie: wenn u algebraisch ist über E und wenn v algebraisch ist über $E(u)$, dann ist v algebraisch über E .

Aufgabe 3.

Es sei $F|E$ ein Erweiterungskörper und $K \subseteq F$ die Menge aller Elemente $u \in F$, die über E algebraisch sind. Zeigen Sie, dass K ein Teilkörper von F ist.

Aufgabe 4.

Es sei $u = \cos(30^\circ)$. Bestimmen Sie $m = |\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}|$.

*-Aufgabe 5.

Es sei p eine Primzahl und $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Weiter sei V ein m -dimensionaler Vektorraum über E , mit $m \geq 2$. Zeigen Sie: in $\text{GL}(V)$ gibt es Elemente g , die keine Eigenwerte in E haben.

Hinweis: Betrachten Sie einen Erweiterungskörper $F|E$ mit $|F : E| = m$ und geeignete Elemente $g \in F^\times$.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*