

Einführung in die Algebra

Blatt 11

Abgabe: 09.07.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Sei E ein Körper. Wir definieren die Ableitung von Polynomen als lineare Abbildung $D : E[T] \rightarrow E[T]$ durch $D(a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_mT^m) = a_1 + 2a_2T + \cdots + ma_mT^{m-1}$. Zeigen Sie folgendes.

- (i) $D(f \cdot h) = f \cdot Dh + h \cdot Df$ (Leibnizregel).
- (ii) Es sei $f = (T - u_1) \cdots (T - u_m)$ mit $1 \in \text{ggT}(f, Df)$. Dann gilt $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$.

Aufgabe 2.

(Endliche Körper) Zeigen Sie folgendes.

- (i) Es sei E ein endlicher Körper mit $\text{char}(E) = p$. Dann gilt $|E| = p^m$ für ein $m \geq 1$.
- (ii) Es sei $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p Primzahl. Weiter sei $q = p^m$ für ein $m \geq 1$. Sei F ein Zerfällungskörper von $f = T^q - T \in E[T]$. Dann gilt $f = (T - u_1) \cdots (T - u_q) \in F[T]$ mit $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$.

Hinweis: Aufgabe 1.

Aufgabe 3.

(Fortsetzung) Zeigen Sie folgendes.

- (i) In 2.(ii) gilt: $K = \{u_1, \dots, u_q\} \subseteq F$ ist ein Teilkörper von F .
- (ii) $K = F$, also $|F| = q = p^m$.

Aufgabe 4.

(Fortsetzung) Zeigen Sie folgendes.

- (i) Sei F ein endlicher Körper, $|F| = q$. Dann ist jedes Element $a \in F$ eine Nullstelle des Polynoms $f = T^q - T$.

Hinweis: $|F^\times| = q - 1$ und Satz von Lagrange.

- (ii) F ist ein Zerfällungskörper von f über dem Primkörper $E = F_0$.
- (iii) Zwei endliche Körper F, F' sind genau dann isomorph, wenn $|F| = |F'|$ gilt.

*-Aufgabe 5.

Finden Sie $u \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}[u]$ und begründen Sie Ihre Antwort.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*

Bitte denken Sie daran, an der Vorlesungsevaluation teilzunehmen.
--