

Einführung in die Algebra

Blatt 10

Abgabe: 02.07.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

- (i) Es sei F ein Körper und $f \in F[T]$ sei irreduzibel. Zeigen Sie, dass $F[T]/(f)$ ein Körper ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $f = T^2 + 1$ in $\mathbb{R}[T]$ irreduzibel ist und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[T]/(f)$ isomorph ist zum Körper $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2.

Es R ein kommutativer Ring. Wir nennen $r \in R$ nilpotent, wenn $r^m = 0$ für ein $m \geq 1$ gilt.

- (i) Zeigen Sie: die Menge I aller nilpotent Elemente ist ein Ideal in R .
- (ii) Zeigen Sie, dass im Ring $S = R/I$ nur das Nullelement nilpotent ist.

Aufgabe 3.

Es sei $R \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller rationalen Cauchyfolgen. Weiter sei $N \subseteq R$ die Menge aller rationalen Folgen, die gegen 0 konvergieren. Zeigen Sie:

- (i) R ist ein Teilring von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
- (ii) $N \trianglelefteq R$ ist ein maximales Ideal.

Welcher Körper ist R/N ?

Aufgabe 4.

Es sei R ein kommutativer Ring und $F \subseteq R$ ein Teilring, der ein Körper ist. Zeigen Sie:

- (i) R ist (in naheliegender Weise) ein F -Vektorraum.
- (ii) Wenn R ein Integritätsbereich ist und wenn $\dim_F(R) < \infty$ gilt, dann ist R ein Körper.

*-Aufgabe 5.

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{x + y\sqrt{-5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist. Folgern Sie aus $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$, dass R kein faktorieller Ring ist.

Hinweis: für $z \in R$ betrachten Sie $N(z) = z\bar{z} \in \mathbb{N}$.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*

Bitte denken Sie daran, an der Vorlesungsevaluation teilzunehmen.