

# Einführung in die Algebra

## Blatt 9

Abgabe: 25.06.2026, 08:00 (elektronisch)

### Aufgabe 1.

Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms  $f = (T - 1)(T - 7)$  im Ring  $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

### Aufgabe 2.

Betrachten Sie die Polynome  $f = T^3 + 2T^2 + 2T + 4$  und  $g = T^2 - 4$  im Ring  $\mathbb{Q}[T]$  und berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus einen ggT.

### Aufgabe 3.

Es sei  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

- (i) Bestimmen Sie alle Primideale.
- (ii) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale.

Ein *Schiefkörper* ist ein nicht notwendig kommutativer Ring  $R$  mit  $1 \neq 0$ , in dem jedes Element  $a \neq 0$  eine Einheit ist. Im folgenden geht es um den Quaternionenschiefkörper  $\mathbb{H}$ .

### Aufgabe 4.

Es sei  $\mathbb{H}$  die Menge aller komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen der Form  $a = \begin{pmatrix} c & -\bar{s} \\ s & \bar{c} \end{pmatrix}$  mit  $c, s \in \mathbb{C}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{H}$  ein Schiefkörper ist.
- (ii) Bestimmen Sie in  $\mathbb{H}$  alle Lösungen  $x$  der Gleichung  $x^2 = r\mathbf{1}$ , für  $r \in \mathbb{R}$  beliebig.

### \*-Aufgabe 5.

Zeigen Sie, dass das Ideal  $I = (3, T) = (3) + (T)$  in  $R = \mathbb{Z}[T]$  kein Hauptideal ist.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den \*-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*

Nicht vergessen: am **Mittwoch, den 24.06. ab 14 Uhr** findet endlich wieder das große **Sommerfest unseres Fachbereichs** statt! Wie auch in den letzten Jahren findet das Fest wieder **im Schlossgarten am Pavillon** statt. Es wird Bier vom Fass, weitere Getränke und Grillgut geben. Meldet Euch auch mit Eurem Team für das **Spikeballturnier** an, es gibt tolle Preise zu gewinnen! Bei weiteren Fragen meldet Euch einfach bei uns oder schaut auf unserer Homepage nach. *Eure Fachschaft*