

Einführung in die Algebra

Blatt 8

Abgabe: 18.06.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Es sei R ein endlicher kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Sei $N \subseteq R$ die Menge der Nullteiler. Zeigen Sie: $R = R^\times \cup N$, die Einheiten in R sind genau die Elemente, die keine Nullteiler sind.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie: die Endomorphismen der abelschen Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ sind genau die Abbildungen $\lambda_q : x \mapsto qx$, für $q \in \mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass der Ring $\text{End}(\mathbb{Q}, +)$ isomorph ist zum Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$.

Hinweis: Für $\alpha \in \text{End}(\mathbb{Q}, +)$ betrachten Sie $q = \alpha(1)$.

Ein Ideal $I \trianglelefteq R$ in einem Ring R heißt *maximal*, wenn $I \subsetneq R$ und wenn es kein Ideal $J \trianglelefteq R$ gibt mit $I \subsetneq J \subsetneq R$.

Aufgabe 3.

Es sei R ein kommutativer Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

- (i) Wenn I maximal ist, dann ist R/I ein Körper.
- (ii) Wenn R/I ein Körper ist, dann ist I maximal.

Aufgabe 4.

Es sei $R = C([0, 1], \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mit den Verknüpfungen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. Für $z \in [0, 1]$ sei $I_z = \{f \in R \mid f(z) = 0\}$. Zeigen Sie, dass I_z ein maximales Ideal in R ist. (Sie können Aufgabe 3 verwenden.)

*-Aufgabe 5.

Zeigen Sie: die maximalen Ideale im Ring $R = C([0, 1], \mathbb{R})$ aus Aufgabe 4 sind genau die Ideale I_z , für $z \in [0, 1]$.

Hinweis. Sei $I \trianglelefteq R$. Nehmen Sie an, es gibt zu jedem $z \in [0, 1]$ ein $f \in I$ mit $f(z) \neq 0$. Nutzen Sie die Kompaktheit von $[0, 1]$ um zu zeigen, dass es ein $h \in I$ gibt, das keine Nullstelle hat. Dann ist $I = R$.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*