

Einführung in die Algebra

Blatt 7

Abgabe: 11.06.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Es sei R ein Ring, Weiter sei $S \subseteq R$ ein Teilring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

- (i) $S + I \subseteq R$ ist ein Teilring von R mit $I \trianglelefteq S + I$.
- (ii) Es gibt einen Ringisomorphismus $\varphi : S/(I \cap S) \rightarrow (S + I)/I$ mit $\varphi(s + (I \cap S)) = s + I$.

Hinweis: Benutzen Sie den ersten Isomorphiesatz für Gruppen.

Aufgabe 2.

Es sei K eine nichtleere Indexmenge und $(R_k)_{k \in K}$ eine Familie von Ringen. Zeigen Sie:

- (a) Das Produkt $R = \prod_{k \in K} R_k$ ist ein Ring (mit den naheliegenden Verknüpfungen) und für jedes $k \in K$ ist $\text{pr}_k : R \rightarrow R_k$ ein Ringhomomorphismus.
- (b) Ist S ein Ring und $\varphi_k : S \rightarrow R_k$ eine Familie von Ringhomomorphismen, für $k \in K$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : S \rightarrow R$ so, dass $\varphi_k = \text{pr}_k \circ \varphi$ für alle $k \in K$ gilt.

Aufgabe 3.

Es sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 4.

Es seien $I, J \trianglelefteq \mathbb{Z}$ die Ideale $I = 12\mathbb{Z}$ und $J = 15\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Ideale IJ , $I \cap J$ und $I + J$ explizit.

*-Aufgabe 5.

Es sei R ein Ring und sei $a \in R$. Zeigen Sie: wenn die Gleichung $ax = 1$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $u \neq v$ hat, dann hat sie unendlich viele verschiedene Lösungen. Insbesondere ist R dann unendlich.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es kein $b \in R$ geben kann mit $ba = 1$. Betrachten Sie dann die Elemente $w_m = u + (1 - ua)a^m$ für $m = 0, 1, 2, \dots$

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*