Prof. Dr. Linus Kramer
Bianca Firmbach, Raquel Murat García, Marjory Mwanza

Sommersemester 2026
Universität Münster

Einführung in die Algebra
Blatt 5

Abgabe: 21.05.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.
Es sei $G \times X \to X$ eine transitive Wirkung. Weiter sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann wirkt auch H auf der Menge X.
Zeigen Sie: H wirkt genau dann transitiv auf X, wenn $G = G_u H$ für ein $u \in X$ gilt.

Aufgabe 2.
Die Gruppe aller inneren Automorphismen einer Gruppe G ist $\mathrm{Inn}(G) = \{\gamma_a \mid a \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$, wobei $\gamma_a(g) = aga^{-1}$.
Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie: Wenn $M, N \trianglelefteq G$ Normalteiler einer Gruppe G sind, mit $M \cap N = \{e\}$, dann ist die Abbildung $\varphi : M \times N \to MN$, $(m, n) \mapsto mn$ ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 4.
Eine Gruppe G heisst *auflösbar*, wenn es ein $k \geq 1$ und Normalteiler $N_0, \dots, N_k \trianglelefteq G$ gibt mit $\{e\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_{k-1} \subseteq N_k = G$, so dass alle Quotienten N_{i+1}/N_i abelsch sind.
Zeigen Sie: jede p-Gruppe ist auflösbar.
Hinweis: Induktion nach m, für $|G| = p^m$.

$*$-Aufgabe 5.
Zeigen Sie: $\mathrm{Sym}(m)$ ist auflösbar für $m \leq 4$.

Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den $*$-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.