

Einführung in die Algebra

Blatt 4

Abgabe: 14.05.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Es sei G eine (möglicherweise unendliche) Gruppe und H eine Untergruppe mit $[G : H] = m < \infty$. Zeigen Sie: es gibt einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq H$ und $[G : N] \leq m!$.

Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von G auf $X = G/H$.

Aufgabe 2.

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = m$ und sei F ein Körper. Zeigen Sie:

- (i) Es gibt einen injektiven Homomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{GL}_m(F)$.
- (ii) Wenn m in F ungleich 0 ist, dann gibt es einen injektiven Homomorphismus $\psi : G \rightarrow \text{GL}_{m-1}(F)$.

Hinweis: Wählen Sie eine Bijektion zwischen G und einer Basis von F^m und lassen Sie dann G auf der Basis wirken.

Aufgabe 3.

Das Zentrum einer Gruppe G ist $\text{Cen}(G) = \{z \in G \mid \text{für alle } g \text{ in } G \text{ gilt } gz = zg\}$. Zeigen Sie:

- (i) Das Zentrum ist ein abelscher Normalteiler in G .
- (ii) Sind G_i Gruppen, für $i \in I$, dann gilt $\text{Cen}(\prod_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} \text{Cen}(G_i)$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: Eine endliche Gruppe G , in der das Zentrum Z mehr als ein Viertel aller Elemente enthält (also $[G : Z] < 4$) ist abelsch.

*-Aufgabe 5.

Zeigen Sie:

- (i) Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \cdot)$ sind isomorph.
- (ii) Die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}, \cdot)$ sind nicht isomorph.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*