Prof. Dr. Linus Kramer
Bianca Firmbach, Raquel Murat García, Marjory Mwanza

Sommersemester 2026
Universität Münster

Einführung in die Algebra
Blatt 3

Abgabe: 07.05.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.
Es seien $m_1, \dots, m_r \geq 2$. Bestimmen Sie den Kern des Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$, der ℓ auf $(\ell + m_1\mathbb{Z}, \dots, \ell + m_r\mathbb{Z})$ abbildet. Geben Sie ein Kriterium an, wann φ surjektiv ist.

Aufgabe 2.
Es sei $1 \to N \hookrightarrow G \xrightarrow{h} K \to 1$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, mit $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie: wenn es einen Homomorphismus $s : K \to G$ gibt mit $h \circ s = \mathrm{id}_K$, dann gibt es in G eine Untergruppe H mit $G = HN$ und $H \cap N = \{e_G\}$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie: jede Untergruppe H von $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch.
Hinweis: für $H \neq \{0\}$ wählen sie $m \in H$ so, dass $m > 0$ minimal ist.

Aufgabe 4.
Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 6$. Zeigen Sie: wenn G isomorph zu einem Produkt $G \cong H \times K$ ist (mit H, K nicht trivial), dann ist G zyklisch.

$*$-Aufgabe 5.
Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist kein Produkt von nichttrivialen Gruppen.
(b) $(\mathbb{Q}, +)$ ist kein Produkt von nichttrivialen Gruppen.
(c) $(\mathbb{R}, +)$ ist ein Produkt von nichttrivialen Gruppen.

Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den $*$-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.