

# Einführung in die Algebra

## Blatt 2

Abgabe: 30.04.2026, 08:00 (elektronisch)

### Aufgabe 1.

Sei  $G$  eine Gruppe mit Untergruppen  $A, B \subseteq G$ . Wir setzen  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $AB$  im allgemeinen keine Untergruppe ist.
- (ii) Zeigen Sie: wenn  $AB = BA$  gilt, dann ist  $AB$  eine Untergruppe.

### Aufgabe 2.

Es sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe mit einer ungeraden Anzahl von Elementen.  
Zeigen Sie:  $\prod_{g \in G} g = e$ .

### Aufgabe 3.

Zeigen Sie: jeder Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist konstant.

### Aufgabe 4.

Es sei  $G$  eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass für alle  $g \in G$  gilt  $g^2 = e$ . Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

### \*-Aufgabe 5.

Zeigen Sie: für jedes  $1 \leq k \leq m$  gibt es in  $\text{Sym}(m)$  Elemente  $g$  der Ordnung  $o(g) = k$ .  
Finden Sie auch ein Element  $g$  mit Ordnung  $o(g) > m$  (für ein geeignetes  $m$ )?

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den \*-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*