

Einführung in die Algebra

Blatt 1

Abgabe: 23.04.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.

Es seien K, H Untergruppen einer Gruppe G . Zeigen Sie: wenn $K \cup H$ eine Untergruppe ist, dann gilt $K \subseteq H$ oder $H \subseteq K$.

Aufgabe 2.

Es sei G eine Gruppe mit $|G| \leq 5$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Hinweis: Wenn $ab \neq ba$, dann kann man mindestens 6 verschiedene Elemente in G finden.

Aufgabe 3.

Sei X eine nichtleere endliche Menge, $|X| = m$. Zeigen Sie, dass gilt $|\text{Sym}(X)| = m!$.

Aufgabe 4.

Ein Monoid M heißt *rechts-kürzbar*, wenn aus $ac = bc$ folgt $a = b$. Zeigen Sie: ein endliches rechts-kürzbares Monoid ist eine Gruppe. Bleibt das auch richtig, wenn M unendlich ist?

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildungen $\rho_c : z \mapsto zc$, für $c \in M$.

*-Aufgabe 5.

Es sei X eine Menge. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ definieren wir eine Verknüpfung Δ durch $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Zeigen Sie: $\mathcal{P}(X)$ ist mit dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe.

Hinweis: Venn-Diagramme sind vielleicht hilfreich.

*Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte. Mit den *-Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte erwerben.*