Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 14/15

8. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 16.12.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1

Gegeben sei ein Ring R und ein Ideal $I \trianglelefteq R$. Zeigen Sie: Wenn gilt $R^* \cap I \neq \emptyset$, so folgt $I = R$.

Aufgabe 8.2

Gegeben seien $k, l \in \mathbb{N}$ und die Ideale $I = k\mathbb{Z}$ und $J = l\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie:

i) $I + J$.
ii) $I \cap J$.
iii) IJ.
iv) Wann gilt $I \subseteq J$?

Aufgabe 8.3

Sei R ein endlicher kommutativer Ring. Zeigen Sie: $a \in R$ ist Einheit genau dann, wenn a kein Nullteiler ist.

Aufgabe 8.4

Sei $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen. Zeigen Sie:

i) Wenn $J \trianglelefteq S$ ein Ideal ist, so ist $\varphi^{-1}(J) \trianglelefteq R$ ein Ideal.
ii) Wenn $I \trianglelefteq R$ ein Ideal ist, so ist $\varphi(I) \trianglelefteq \varphi(R)$ ein Ideal.

*** Aufgabe**

Sei

$$R = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

der Ring der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit Verknüpfungen

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),$$
$$(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$$

für $f, g \in R$ und $t \in [0,1]$.

i) Zeigen Sie: Für jedes $t \in [0,1]$ ist

$$I_t = \{f \in R \mid f(t) = 0\}$$

ein maximales Ideal in R.

ii) Gibt es noch andere maximale Ideale in R?