

7. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 02.12.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 7.1

Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit $\#G = n$. Sei weiter k ein Teiler von n . Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe H mit $\#H = k$ hat.

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass die Gruppen $\text{Sym}(3)$ und $\text{Sym}(4)$ auflösbar sind.

Aufgabe 7.3

- i) Gegeben sei eine Gruppe G und ein Normalteiler $N \subseteq G$. Zeigen Sie: Wenn N und G/N auflösbare Gruppen sind, dann ist G auflösbar.
- ii) Gegeben seien auflösbare Gruppen G und H . Zeigen Sie, dass die Gruppe $G \times H$ auflösbar ist.

Aufgabe 7.4

Gegeben seien endliche abelsche Gruppen G und H . Zeigen Sie: Wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\#\{g \in G \mid \text{ord}(g) = k\} = \#\{h \in H \mid \text{ord}(h) = k\},$$

dann gilt:

$$G \cong H.$$

* **Nikolausaufgabe** Für die folgende Aufgabe haben Sie zwei Wochen Bearbeitungszeit (Abgabe: bis 09. 12. 2014).

Die Spinne *Manfred* hat n Beine und n verschieden große Füße. Jedes Jahr am 6. Dezember schenkt *Manfreds* Freundin –die Nikolaus– ihrem Freund n nagelneue maßgefertigte Stiefel und stellt diese im Kreis auf. Anschließend hüpfet *Manfred* zum Anprobieren voll freudiger Erwartung in seine neuen Stiefel. Kann die Nikolaus die Stiefel so anordnen, dass egal wie *Manfred* hüpfet, stets ein Fuß im richtigen Stiefel landet?