Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 14/15

6. Hausaufgabenblatt zur Einführung in die Algebra

(**Abgabe:** bis Dienstag 25.11.2014, 12:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie:

i) Jede endliche Gruppe, deren Ordnung eine Primzahl ist, ist zyklisch.
ii) Wenn $\phi : K \to G$ ein Monomorphismus von endlichen Gruppen ist und wenn gilt $\#K = \#G$, dann ist ϕ ein Isomorphismus.

Aufgabe 6.2

Zeigen Sie:

i) Wenn $N, M \subseteq G$ Normalteiler sind und wenn gilt $N \cap M = \{e_G\}$, dann ist die Abbildung

$$N \times M \to G$$

$$(n, m) \mapsto n \cdot m$$

ein Monomorphismus.

ii) Gegeben sei eine endliche Gruppe G, eine Primzahl p die $\#G$ teilt und sei weiter $U \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Zeigen Sie, dass $\#\,\mathrm{Syl}_p(G) = 1$ gilt genau dann, wenn U ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 6.3

Sei G eine Gruppe und p, q Primzahlen. Zeigen Sie:

i) Bestimmen Sie alle Sylowgruppen in Sym(3).
ii) Wenn $\#G = 30$, dann hat G einen echten Normalteiler.
iii) Wenn $\#G = 56$, dann hat G einen echten Normalteiler.
iv) Wenn $\#G = p^m q$ und $p > q$, dann hat G einen echten Normalteiler.

Aufgabe 6.4

Gegeben sei eine endliche Gruppe G. Weiter sei K ein Normalteiler in G und $U \in \mathrm{Syl}_p(K)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$G = K \cdot N_G(U).$$

*** Aufgabe**

Gegeben sei eine endliche Gruppe G, so dass $\#\mathrm{Syl}_p(G) = 1$ für alle p Primzahlen, die die Ordnung der Gruppe teilen. Zeigen Sie, dass G ein direktes Produkt der Sylowgruppen ist.