§ 5. Krümmung und Topologie

<u>Erinnerung</u>: $\Omega(M,p,q) = \{ c : [0,1] \to M \mid c(0) = p,\ c(1) = q,\ c \text{ stückweise glatt} \}$.

$L(c) = \int_0^1 \| \dot c(t) \| \, dt$ Kurvenlänge

1. <u>Def</u> Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p,q \in M$

Das <u>Energiefunktional</u> $E : \Omega(M,p,q) \to \mathbb{R}$ ist die Abbildung
$$E(c) = \int_0^1 \| \dot c(t) \|^2 \, dt .$$

Ist $0 \le a \le b \le 1$, so gilt nach Cauchy-Schwarz
$$\left(\int_a^b f(t) g(t) \, dt \right)^2 \le \int_a^b f(t)^2 \, dt \cdot \int_a^b g(t)^2 \, dt$$

also ($f = 1$, $g(t) = \| \dot c(t) \|$)
$$\left(\int_a^b \| \dot c(t) \| \, dt \right)^2 \le (b-a) \cdot \int_a^b \| \dot c(t) \|^2 \, dt$$

und insbesondere $L(c)^2 \le E(c)$. Weiter gilt Gleichheit genau dann, wenn $\| \dot c(t) \| = \text{const}$.

#

2. <u>Lemma</u> Sei (M,g) eine zusammenh. vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p,q \in M$ mit $d(p,q) = r$. Dann gilt für $c \in \Omega(M,p,q)$
$$E(c) \ge r^2 \quad \text{und} \quad E(c) = r^2 \text{ genau dann,}$$

⊛ Cauchy - Schwarz:

Sei $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, es gilt

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$$

$$\big\| \langle f, g\rangle \cdot g - \|g\|^2 \cdot f \big\|^2 \underset{\uparrow}{=} \|g\|^2 \cdot \left(\|g\|^2 \cdot \|f\|^2 - \langle f, g\rangle^2 \right) \qquad \square$$

ausmultiplizieren!

wenn c eine kürzeste Geodäte von p nach q ist.

<u>Beweis</u> Sei $\tilde{c}$ eine kürzeste Geodäte von p nach q.

Dann gilt $r = L(\tilde{c}) \leq L(c)$ und $\|\dot{\tilde{c}}\| = \text{const}$,

also $E(\tilde{c}) = L(\tilde{c})^2 \leq L(c)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CSU}}}{\leq} E(c)$.

Falls Gleichheit gilt, ist nach CSU $\|\dot{c}(t)\| = \lambda = \text{const}$ (fast überall), mit § 3.22 A folgt, dass c Geodäte ist $\square$

3. <u>Def</u> Sei (M,g) eine zush. vollst. Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p,q \in M$ und $c \in \Omega(M,p,q)$. Eine <u>Variation</u> von c ist eine stetige Abbildung

$$h: [0,1] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M, \quad (t,s) \mapsto h(t,s) = h_s(t)$$

mit (i) $h_0 = c$

(ii) Es gibt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ so, dass h glatt ist auf $[t_{j-1}, t_j] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, $j = 1,\dots,n$.

Falls $h_s(0) = p$ und $h_s(1) = q$ für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ gilt, heißt h <u>eigentliche Variation</u> oder <u>Variation mit festen Endpunkten</u>.

Wir setzen $W_t = \frac{\partial h}{\partial s}(t,0)$, das <u>Variationsfeld</u> von h. Das Feld W_t ist stetig und stückweise glatt.

Bsp W_t stetiges, stückweise glattes Vektorfeld längs c. Setze $h_s(t) = \exp_{c(t)}(s \cdot W_t)$ $\leadsto$ h ist Variation mit Variationsfeld W.

Konvention: ist V ein in t eventuell unstetiges Vektorfeld längs c, setze $\Delta_t V = \underbrace{\lim_{s \searrow t} V_s}_{\text{rechtsseitig}} - \underbrace{\lim_{s \nearrow t} V_s}_{\text{linksseitig Grenzwert}} = V(t^+) - V(t^-)$

(wir nehmen an, die beiden Grenzwerte existieren)

4. **Theorem** (1. Variationsformel) Sei (M,g) Riem. Mannf., $p,q \in M$ und sei $c \in \Omega(M,p,q)$. Sei h eine Variation von c mit Variationsfeld W, h glatt auf $[t_{j-1}, t_j] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ $j = 1, \ldots, n$
$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$

Für $t \neq t_j$ setze $A_t = \frac{D}{dt} \dot{c}\big|_t$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \frac{dE(h_s)}{ds}\bigg|_{s=0} + \sum_{j=1}^{n-1} g(W_{t_j}, \Delta_{t_j} \dot{c}) + \int_0^1 g(W_t, A_t)\, dt$$

$$= g(W_1, \dot{c}(1)) - g(W_0, \dot{c}(0)).$$

Beweis $E(h_s) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) dt$, wir leiten jeden Summanden nach s ab.

$$\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) \underset{\S 3.21}{\overset{\uparrow}{=}} 2 \cdot g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) = 2 \cdot g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$\overset{①}{=} 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) dt = \left[g\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right)\right]_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{ds} E(h_s)\Big|_{s=0} = g(W_1, \dot c(1)) - g(W_0, \dot c(0)) - \sum_{j=1}^{n-1} g(W_{t_j}, \Delta_{t_j}\dot c)$$
$$- \int_0^1 g(W_t, A_t)\, dt \quad \square$$

5. Korollar Es gilt $\frac{d}{ds} E(h_s)\Big|_{s=0} = 0$ für jede eigentliche Variation h von c genau dann, wenn c eine Geodät ist.

Beweis Wenn c eine Geodät ist, ist $\Delta_{t_j}\dot c = 0$ für alle j und $A_t = 0$. Wenn h eigentlich ist, ist $W_0 = 0$, $W_1 = 0$.

Umkehrung: (a) Wähle $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ glatt mit $\varphi(t_j) = 0$, $j = 0, \ldots, n$ und $\varphi(t) > 0$ sonst.

Setze $h_s(t) = \exp_{c(t)}(s \cdot \varphi(t) \cdot A_t)$

$\rightsquigarrow$ h ist eigentlich Variation mit Variationsfeld $\varphi(t)\cdot A_t = W_t$

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{g(W_{t_j}, \Delta_{t_j}\dot{c})}_{=0} + \int_0^1 \varphi(t)\, g(A_t, A_t)\, dt \Rightarrow A_t = 0$$

für $t \neq t_0, \dots, t_n$ $\Rightarrow$ c stückweise geodätisch.

(b) Wähle V stetig und stückweise glatt längs c mit

$V_0 = 0$, $V_1 = 0$, $V_{t_j} = \Delta_{t_j}\dot{c}$ $j = 1, \dots, n-1$, setze

$\tilde{h}_s(t) = \exp_{c(t)}(s \cdot V_t)$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{h}$ eigentliche Variation und

damit $0 = \sum_{j=1}^{n-1} g(\Delta_{t_j}\dot{c}, \Delta_{t_j}\dot{c}) \Rightarrow \dot{c}$ stetig

auf $[0,1] \Rightarrow c$ Geodätische. $\square$

6. <u>Theorem</u> (2. Variationsformel) Sei (M, g) Riem. Mannf., seien $p, q \in M$ und sei $c \in \Omega(M, p, q)$ eine Geodätische. Sei h eine Variation von c mit Variationsfeld W, glatt auf $[t_{j-1}, t_j] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$, $t_0 = 0 < \dots < t_n = 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2} E(h_s)\Big|_{s=0} + \sum_{j=1}^{n-1} g\left(W_{t_j}, \Delta_{t_j}\frac{\nabla}{dt}W_t\right)$$

$$+ \int_0^1 g\left(W_t, \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}W_t + R(W_t, \dot{c}(t))\dot{c}(t)\right) dt$$

$$= \left[g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s}, \dot{c}\right)\right]_{0,s=0}^{1} + \left[g\left(W, \frac{\nabla}{dt}W\right)\right]_0^1$$

Beweis: $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} g\left(\frac{\partial h}{\partial t},\frac{\partial h}{\partial t}\right) \overset{\text{s.o. } ①}{=} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$- g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}\right)$$

$$- g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial h}{\partial s},\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}-\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\right)\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

Integration über t von t_{j-1} bis t_j bei $s=0$ ergibt

$$\left[g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\dot c(t)\right)\right]_{(t_{j-1},0)}^{(t_j,0)} + \left[g\left(W,\frac{\nabla}{dt}W\right)\right]_{t_{j-1}}^{t_j}$$

$$- \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot c}_{=0}\right)dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(W_t,\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}W_t\right)dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\left(W_t, R(\dot c(t),W_t)\dot c(t)\right)dt$$

Summation der n Terme ergibt

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E(h_s)\Big|_{s=0} = \left[g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial s},\dot c\right)\right]_0^1 + \left[g\left(W,\frac{\nabla}{dt}W\right)\right]_0^1 - \sum_{j=1}^{n-1} g\left(W_{t_j},\Delta_{t_j}\frac{\nabla}{dt}W\right)$$

$$- \int_0^1 g\left(W_t,\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}W_t\right)dt + \int_0^1 g\left(W_t, R(\dot c(t),W_t)\dot c(t)\right)dt$$

□

Ist Y ein Vektorfeld, so gilt:

$$\boxed{\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds} - \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\right) Y = R\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) Y.}$$

In lokalen Koordinaten x: $\quad Y = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\frac{\nabla}{ds} Y = \frac{\nabla}{ds} \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial(\eta_j \circ h)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds} Y = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2(\eta_j \circ h)}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial(\eta_j \circ h)}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial h}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial(\eta_j \circ h)}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \nabla_{\frac{\partial h}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow LS = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \left(\nabla_{\frac{\partial h}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} - \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial h}{\partial t}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j R\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = R\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) Y$$

denn $\left[\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right] = 0$

$\#$

Falls h eine eigentliche Variation ist und falls h glatt ist, ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E(h_s)\Big|_{s=0} + \int_0^1 g\left(W_t, \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}W_t + R(W_t, \dot c(t))\dot c(t)\right)dt = 0$$

7. <u>Def</u> Sei c eine Geodätische in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Ein glattes Vektorfeld $W \in \mathfrak{X}(c)$ heißt <u>Jacobi-Feld</u>, wenn gilt

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{dt}W_t + R(W_t, \dot c(t))\dot c(t) = 0 \qquad \text{für alle } t.$$

Das ist eine lineare DGL 2. Ordnung, die folglich eindeutige Lösung hat, wenn man W_0 und $\frac{D}{dt}W_t\big|_{t=0}$ vorgibt.

Ist $c \in \Omega(M, p, q)$ eine Geodätische und ist $v, w \in T_pM$, so gibt es also ein eindeutiges Jacobi-Feld X längs c mit

$$X_0 = v$$
$$\frac{D}{dt}X\Big|_{t=0} = w$$

Wir schreiben kurz $X = J(v, w)$

8. Def Eine glatte Variation $h: [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ heißt geodätisch, falls für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Kurve h_s eine Geodäte ist.

Satz Sei $c: [0,1] \to M$ eine Geodäte, sei $W \in \mathcal{X}(c)$. Dann ist W genau dann ein Jacobi-Feld, wenn W Variationsfeld einer geodätischen Variation von c ist.

Beweis Angenommen, h ist eine geodätische Variation von c, $W_t = \frac{\partial h}{\partial s}(t,0)$. Es gilt in $s=0$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt} W_t = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\nabla}{ds}\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}}_{=0} + \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds} - \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\right)\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$= R(\dot{c}(t), W_t)\dot{c}(t) \Rightarrow W \text{ ist Jacobi-Feld.}$$

Angenommen, W ist ein Jacobi-Feld. Setze für $-\varepsilon < s < \varepsilon$

$$c_1(s) = \exp_p(s \cdot W_0), \quad p = c(0).$$

Sei X, Y parallel längs c_1 mit $X_0 = \dot{c}(0)$

$$Y_0 = \frac{\nabla}{dt} W_t \Big|_{t=0}$$

Betrachte die glatte Variation von c

$$h_s(t) = \exp_{c_1(s)}\left(t \cdot (X_s + s \cdot Y_s)\right)$$

$$h_0(t) = \exp_{\underbrace{c_1(0)}_{=p}}(t\,\dot{c}(0)) = c(t)$$

Für festes s ist h_s eine Geodäte $\Rightarrow$ h ist eine geodätische Variation von c, mit ein Variationsfeld $V_t = \frac{\partial h}{\partial s}\big|_{s=0}$. Nach der Rechnung oben ist V ein Jacobi-Feld. Nun gilt

$$V_0 = \frac{\partial h}{\partial s}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \dot c_1(0) = W_0$$

$$\frac{D}{dt}V_t\Big|_{t=0} = \frac{D}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \frac{D}{ds}\left(X_s + s Y_s\right)\Big|_{s=0}$$

$$= Y_0 = \frac{D}{dt}W_t\Big|_{t=0}$$

also $V = W$. $\square$

9. <u>Beobachtung</u> Sei $c : [a,b] \to M$ ein Geodät.

(1) $W_t = a\cdot\dot c(t) + b\cdot t\,\dot c(t)$ ist ein Jacobi-Feld,

denn $\frac{D}{dt}W_t = b\cdot\dot c(t) \Rightarrow \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}W_t = 0 = R(W_t,\dot c)\dot c$

(2) Sei X_t ein paralleles Vektorfeld längs c,

mit $g(X_0,\dot c(0)) = 0$. Wegen

$$\frac{d}{dt}(X_t,\dot c(t)) = g\Big(\underbrace{\tfrac{D}{dt}X_t}_{=0},\dot c(t)\Big) + g\Big(X_t,\underbrace{\tfrac{D}{dt}\dot c(t)}_{=0}\Big) = 0$$

ist dann $g(X_t,\dot c(t)) = 0$.

Angenommen, M hat konstante Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$

und $\dot c \neq 0$, $\rho = \|\dot c(t)\|^2 > 0$.

Ansatz: $W_t = \psi_\alpha(t) \cdot X_t \rightsquigarrow \frac{\nabla}{dt} W_t = \psi_\alpha'(t) X_t$

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 W_t = \psi_\alpha''(t) \cdot X_t$$

$$R(W_t, \dot c(t))\dot c(t) = \alpha \cdot \big(\underbrace{g(\dot c(t), \dot c(t))}_{=\beta} W_t + \underbrace{g(W_t, \dot c(t))}_{=0} \dot c(t)\big)$$

$$= \alpha \cdot \beta \cdot \psi_\alpha(t) X_t$$

$\rightsquigarrow$ DGL $\quad \psi_\alpha'' + \alpha \cdot \beta \cdot \psi_\alpha = 0$

$\alpha = 0$: $\quad \psi_\alpha(t) = a + b \cdot t \quad \checkmark$

$\alpha > 0$: $\quad \psi_\alpha(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$

$\psi_\alpha''(t) = -\omega^2 \cdot \psi_\alpha(t)$

$\rightsquigarrow \omega^2 = \alpha \cdot \beta, \quad \omega = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

$\alpha < 0$: $\quad \psi_\alpha(t) = a \cdot \cosh(\omega t) + b \sinh(\omega t)$

$\psi_\alpha''(t) = \omega^2 \cdot \psi_\alpha(t)$

$\omega^2 = -\alpha\beta, \quad \omega = \sqrt{-\alpha \cdot \beta}$

---

10. Lemma Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K = \alpha$, sei $p \in M$, sei $u \in T_pM$, $u \neq 0$ und $v \in T_pM$ mit $g(u,v) = 0$. Dann gilt

$$\frac{d}{ds}\left(\exp_p(u + sv)\right)\Big|_{s=0} = J(0,v)_1$$

$$= \begin{cases} X_1 & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\omega}\sin(\omega) X_1 & \alpha > 0, \ \omega = \sqrt{\alpha} \cdot \|u\| \\ \frac{1}{\omega}\sinh(\omega) \cdot X_1 & \alpha < 0, \ \omega = \sqrt{-\alpha} \cdot \|u\| \end{cases}$$

wobei X_t parallel ist längs $c(t) = \exp_p(tu)$, mit $X_0 = v$.

Bew.: Betrachte die geodätische Variation $h_s(t) = \exp_p(t(u+sv))$ von $c = h_0$ mit Variationsfeld W_t. Es gilt $W_0 = \frac{\partial h}{\partial s}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = 0$

$$\frac{\nabla}{dt} W_t\Big|_{t=0} = \frac{D}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \frac{D}{ds}(u+sv)\Big|_{s=0} = v$$

$$\Rightarrow W_t = J(0,v)_t$$ $\square$

11. Def Eine Riemannsche Immersion, die gleichzeitig eine Submersion ist, heißt lokale Isometrie.

⌜Dh: $f: M \to N$, $Df(p)$ bijektiv und Isometrie

$Df(p): (T_pM, g_p^M) \xrightarrow{\cong} (T_{f(p)}N, g_{f(p)}^N)$ für alle $p \in M$. ⌟

Theorem Sei $f: M \to N$ eine lokale Isometrie Riem. Mannigf., sei M vollständig. Dann ist f eine Überlagerung, d.h. zu jedem $q \in N$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq N$ so, dass

$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subseteq M$ offen, $f|_{V_i}: V_i \to U$ Homöomorphism für alle i und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$

⊭

Beweis: Sei $q \in N$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $a, b \in B_{2\varepsilon}(q)$ genau eine kürzeste Geodäte von a und b existiert, vgl. § 3.28, so dass $\exp_q : B_{2\varepsilon}(0) \to B_{2\varepsilon}(q)$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $U = B_\varepsilon(q)$.

① Sei $f(p) = q$. Es gilt $f(B_\varepsilon(p)) \subseteq B_\varepsilon(q)$, da f lokal Isometrie ist. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_pM \supseteq B_\varepsilon(0) \arrow[r, "\exp_p", "\text{glatt}"'] \arrow[d, "Df(p)"', "\cong"] & B_\varepsilon(p) =: V_q \arrow[d, "f", "\text{glatt}"'] \\
T_qM \supseteq B_\varepsilon(0) \arrow[r, "\exp_q", "\cong"'] & B_\varepsilon(q) = U
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $f : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(q)$ ein Diffeomorphismus ist.

② Ist $r \in N$ mit $f(r) \in U$, so gibt es eine Geodäte $\tilde{c} : [0,1] \to M$ mit $\tilde{c}(0) = r$, $f(\tilde{c}(1)) = p$ und $L(\tilde{c}) < \varepsilon \Rightarrow r \in B_\varepsilon(\tilde{c}(1))$. Es folgt

$$f^{-1}(B_\varepsilon(q)) = \bigcup_{p \in f^{-1}(q)} B_\varepsilon(p)$$

③ Ist $f(p_1) = q = f(p_2)$ und ist $B_\varepsilon(p_1) \cap B_\varepsilon(p_2) \neq \emptyset$, so gibt es eine Geodäte $\tilde{c} : [0,1] \to N$ mit $\tilde{c}(0) = p_1$, $\tilde{c}(1) = p_2$, $L(\tilde{c}) < 2 \cdot \varepsilon$. Betrachte $c = f \circ \tilde{c}$, $c(t) = \exp_q(tu)$. Es folgt $u = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$. $\square$

$c(0) = c(1)$

12. <u>Korollar</u> Ist (M,g) eine vollst. zush. Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K=0$, so ist für jedes $p\in M$

$$\exp_p : T_pM \to M$$

eine lokale Isometrie bezüglich der (euklidischen) Metrik g_p auf T_pM.

Insbesondere ist $(M,g) \cong (\mathbb{R}^\ell, g_{eucl})$, falls M einfach zusammenhängend ist.

<u>Bew:</u> Aus der Formel §5.10 (Fall $\alpha=0$) folgt direkt, dass $\exp_p$ eine lokale Isometrie ist. $\square$

13. Ist $K=\alpha=\text{const}$ mit $\alpha\neq 0$, dann modifizieren wir die Metrik auf T_pM in Abhängigkeit von $u\in T_pM$.

Für $u\neq 0$, $v\in T_pM$ setze $v_{\parallel} = \frac{1}{\|u\|^2}\langle v,u\rangle u$ (orthogonale Projektion von v auf $\mathbb{R}u$), $v_\perp = v - v_\parallel$.

$\Rightarrow \|v_\perp\|^2 = \|v\|^2 - \|v_\parallel\|^2$. Für $\alpha<0$ setze $\omega = \sqrt{-\alpha}\,\|u\|$

und
$$\begin{aligned} g_u(v) &= \|v_\parallel\|^2 + \left(\tfrac{1}{\omega}\cdot\sinh(\omega)\right)^2\|v_\perp\|^2 \\ &= \|v_\parallel\|^2 + \left(\tfrac{1}{\omega}\sinh(\omega)\right)^2\left(\|v\|^2 - \|v_\parallel\|^2\right) \\ &= \|v_\parallel\|^2\left(1-\left(\tfrac{1}{\omega}\sinh(\omega)\right)^2\right) + \left(\tfrac{1}{\omega}\sinh(\omega)\right)^2\|v\|^2 \\ &= \langle v,u\rangle^2 \underbrace{\frac{1}{\|u\|^2}\left(1-\left(\tfrac{1}{\omega}\sinh(\omega)\right)^2\right)}_{\text{glatt}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{\omega}\sinh(\omega)\right)^2}_{\text{glatt}}\|v\|^2 \end{aligned}$$

$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

14. <u>Theorem</u> Sei (M, g) $\overset{(zush)}{}$ vollst. Riem. Mannf. mit konstanter Schnittkrümmung $\alpha < 0$. Sei $p \in M$. Dann ist $\exp_p : T_pM \to M$ eine lokale Isometrie, wenn wir T_pM mit der Metrik

$$\tilde{g}_u(v,v) = q_u(v) \quad \text{versehen}$$

$$\left[\tilde{g}_u(v,w) = \frac{1}{2}\left(q_u(v+w) - q_u(v) - q_u(w) \right) \right]$$

Insbesondere gilt $(M, g) \cong (T_pM, \tilde{g})$ wenn M einfach zush. ist. $\square$

Damit sind alle einfach zush. Mannigfaltigkeiten mit Konstanter Schnittkrümmung $\alpha \leq 0$ klassifiziert.

Für $\alpha = -1$ erhält man den <u>hyperbolischen Raum</u> $\mathbb{H}^l$.

—

Bleibt der Fall $\alpha > 0$. Wie in §5.13 definieren wir auf T_pM eine quadratische Form

$$q_u(v) = \langle v, u\rangle^2 \frac{1}{\|u\|^2}\left(1 - \left(\tfrac{1}{\omega}\sin(\omega)\right)^2\right) + \left(\tfrac{1}{\omega}\sin(\omega)\right)^2 \|v\|^2$$

$\omega = \sqrt{-\alpha}\,\|u\|$ $\rightsquigarrow$ q ist glatt, weil

$\sin(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

Für $\omega < \pi$ ist q_u positiv definit, d.h. für $|u| < \frac{\pi}{\alpha}$. Sei $\hat{p} \in S_\alpha$ (Sphäre mit

Radius $\alpha > 0$). Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_pM \supseteq B_{\frac{\pi}{\alpha}}(0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\exp_p"', "\text{l. Isom}" left] & B_{\frac{\pi}{\alpha}}(0) \subseteq T_{\hat{p}} S_\alpha \arrow[d, "\exp_{\hat{p}}", "\text{l. Isom } \cong"'] \\
M & S_\alpha - \{-\hat{p}\} \arrow[l, "\text{lok. Isometrie}"', "F"]
\end{tikzcd}$$

Metrik $\tilde{g}$

Wähle nun $\hat{q} \in S_\alpha$ mit $\hat{q} \neq \pm \hat{p}$. Dann betrachte die Abbildung

$$F_1 = \exp_{F(\hat{q})} \circ DF(\hat{q}) \circ \exp_{\hat{q}}^{-1} \Big|_{S_\alpha - \{-\hat{q}\}}$$

Da F eine lokale Isometrie ist, gilt

$$\exp_{F(\hat{q})} \circ DF(\hat{q}) = F \circ \exp_{\hat{q}}$$

$\Rightarrow$ F_1 und F stimmen auf $S_\alpha - \{-\hat{q}, -q\}$ überein.

Wir erhalten eine lokale Isometrie $\tilde{F}: S_\alpha \to M$.

15. **Theorem** Sei (M, g) eine (zush) vollständige Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung α. Dann existiert eine lokale Isometrie $S_\alpha \to M$. Insbesondere ist M kompakt. Ist M einfach zusammenhängend, so ist $M \cong S_\alpha$.

16. <u>Thm</u> (Böhm-Wilking) Sei (M,g) kompakt zush mit positivem Krümmungsoperator $R: \Lambda^2 T_pM \times \Lambda^2 T_pM \to \mathbb{R}$ ist diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ mit Schnittkrümmung $\alpha = 1$.