§ 3 Der Levi-Civita Zusammenhang

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, seien $X, Y : U \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ glatte Funktionen (also Vektorfelder). Wir definieren

$X = (X_1, \dots, X_l)$
$Y = (Y_1, \dots, Y_l)$

$$Z = \nabla_X Y \quad \text{durch} \quad Z = (Z_1, \dots, Z_l)$$

$$Z_j = \sum_{k=1}^{l} X_k \frac{\partial Y_j}{\partial u_k}$$

Dann gilt: $\nabla_X Y$ ist $\mathbb{R}$-linear in X und Y. Ist $f, h \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, so gilt

$$\nabla_{f \cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y$$

sowie $$\nabla_X (h \cdot Z) = X(h) Z + h \cdot \nabla_X Z$$

$$X(h) = \sum X_i \frac{\partial h}{\partial u_i}$$

und $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Ist $W : U \to \mathbb{R}^l$ ein weiteres Vektorfeld, so gilt

$$W(\underbrace{\langle X, Y \rangle}_{\sum_j X_j Y_j}) = \langle \nabla_W X, Y \rangle + \langle X, \nabla_W Y \rangle$$

Wir suchen etwas ähnliches auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

1. **<u>Def</u>** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Ein <u>affiner Zusammenhang</u> ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma^\infty(TM \to M) \times \Gamma^\infty(TM \to M) \to \Gamma^\infty(TM \to M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

so, dass für alle $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt

(Z) $$\nabla_{(f+h)\cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y + h \cdot \nabla_X Y$$

$$\nabla_X (f+h)\cdot Y = X(f+h) + (f+h)\cdot \nabla_X Y$$

"Leibniz-Regel" im 2. Argument.

Der Zusammenhang heißt <u>torsionsfrei</u>, wenn zusätzlich gilt

(T) $$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Lie-Klammer, vgl §2.15

Angenommen, g ist eine Riemannsche Metrik auf M.

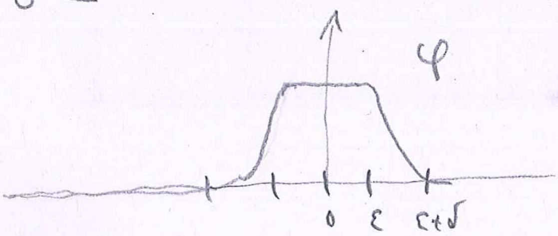
Der Zusammenhang heißt <u>metrisch</u>, wenn für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt

(M) $$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau ein torsionsfreier metrischer Zusammenhang existiert, der Levi-Civita Zusammenhang.

Dazu ein nützliches technisches Hilfsmittel

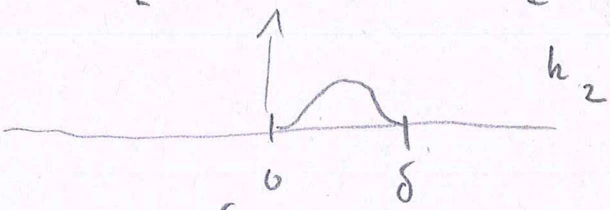
2. Lemma Sei $\varepsilon, \delta > 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\varphi(s) = 0$ für $|s| \geq \varepsilon+\delta$, $\varphi(s) = 1$ für $|s| \leq \varepsilon$.



Beweis Sei $h_1(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ \exp(-1/s^2) & s < 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ h_1 glatt

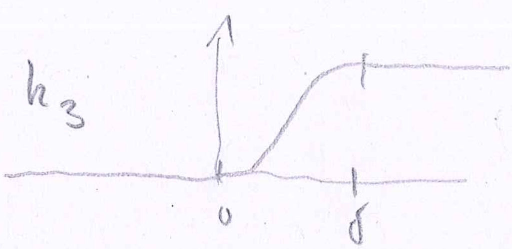
$(\to$ Ü 1$)$

Sei $h_2(s) = h_1(s) \cdot h_1(\delta - s)$



$\rightsquigarrow$ h_2 glatt

Sei $A = \int_0^\delta h_2(s)\,ds$ und $h_3(s) = \frac{1}{A}\int_0^s h_2(s)\,ds$



$$\varphi(s) = h_3(s+\delta+\varepsilon) \cdot h_3(-s+\delta+\varepsilon) \qquad \square$$

Korollar A Sei M eine glatte l-Mannigfaltigkeit, sei $W \subseteq M$ offen und sei $p \in W$. Dann existiert eine glatte Funktion $\Theta : M \to [0,1]$ so, dass $\Theta(q) = 1$ für alle q in einer Umgebung von p gilt, mit Träger $\overline{\mathrm{supp}(\Theta) = \{ q \in M \mid \Theta(q) \neq 0 \}} \subseteq W$.

Beweis Sei $x : U \xrightarrow{\cong} U' \subseteq \mathbb{R}^l$ eine Karte mit $p \in U$. OE $U \subseteq W$ und OE $x(p) = 0$. Wähle $\varepsilon, \delta > 0$ so, dass $\{ v \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{j=1}^{l} v_j^2 \leq 2(\varepsilon + \delta) \} \subseteq U'$ gilt.

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ wie in vorigem Lemma. Definiere $\Theta : M \to [0,1]$ durch
$$\Theta(q) = \begin{cases} \varphi(x_1(q)^2 + \dots + x_l(q)^2) & \text{wenn } q \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist Θ glatt auf U und glatt auf der offenen Menge $V = M - \{ q \in U \mid \sum_{j=1}^{l} x_j^2(q) \leq \varepsilon + \delta \}$, also glatt auf $U \cup V = M$. # $\square$

Korollar B Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $W \subseteq M$ offen und sei $f \in C^\infty(W, \mathbb{R})$. Für jedes $p \in W$ gibt es dann ein $\tilde{f} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, das auf einer Umgebung V von p mit f übereinstimmt, $\tilde{f}(q) = f(q)$ für alle $q \in V$.

<u>Beweis</u> Wähle Θ wie im Korollar A zu p. Dann ist die Funktion

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} \Theta(q) f(q) & \text{falls } q \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

glatt auf W und auf $M - \operatorname{supp}(\Theta)$, also überall glatt, und nahe p gilt $\Theta(q) = 1 \leadsto \tilde{f}(q) = f(q)$. $\square$

<u>Korollar G</u> Sei M eine diff'bare l-Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann existiert ein glattes Vektorfeld X mit $X_p = v$.

<u>Beweis</u> Sei $g: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ eine Karte mit $p \in U$. Schreibe $v = \sum_{j=1}^{l} v_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p$. Wähle Θ wie in Korollar A mit $\operatorname{supp}(\Theta) \subseteq U$, setze

$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{wenn } q \in M - U \\ \sum_{j=1}^{l} \Theta(q) v_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_q & \text{wenn } q \in U \end{cases}$$

$\square$

Insbesondere ist $\Gamma^\infty(TM \to M) \neq \{0\}$, wenn $\dim(M) > 0$.

Korollar D Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M, sei $p \in M$ und seien $X, Y \in \Gamma^\infty(TM \to M)$

(i) Wenn $X_p = 0$ gilt, folgt $(\nabla_X Y)_p = 0$

(ii) Wenn Y auf einer Umgebung W von p verschwindet, ist $(\nabla_X Y)_p = 0$

Folgerung: sind $\tilde{X}, \tilde{Y}$ weitere Vektorfelder und gilt $X_p = \tilde{X}_p$ oder gilt $Y_q = \tilde{Y}_q$ in einer Umgebung W von p, so ist $\nabla_X Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$.

Beweis (i) Sei $z : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^\ell$ eine Karte mit $p \in U$. Schreibe $X = \sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q$ für $q \in U$.

Sei $\Theta : M \to [0,1]$ glatte Buckelfunktion mit $\operatorname{supp}(\Theta) \subseteq U$ und $\Theta(q) = 1$ in einer Umgebung von p. Es folgt

$$\Theta^2 \cdot X = \sum_{j=0}^{\ell} \varsigma_j \cdot X_j \qquad X_{j,q} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q \notin U \\ \Theta(q) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q & \text{falls } q \in U \end{cases}$$

$$\varsigma_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } q \notin U \\ \xi_j(q)\Theta(q) & \text{falls } q \in U \end{cases}$$

$\Rightarrow (\nabla_X Y)_p$

$$= \underbrace{\Theta^2(p)}_{=1} (\nabla_X Y)_p = \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\varsigma_j(p)}_{=0} (\nabla_{X_j} Y)_p = 0$$

(ii) Wähle Buckelfunktion Θ mit $\mathrm{supp}(\Theta) \subseteq W$
und $\Theta(q) = 1$ in Umgebung von p.

Dann gilt $\Psi = (1-\Theta)\Psi$

$$\Rightarrow \nabla_X \Psi = X(1-\Theta) \cdot \Psi + (1-\Theta) \cdot \nabla_X \Psi$$

und $(1-\Theta)(p) = 0$ $\quad X(1-\Theta)(p) = 0$ da $(1-\Theta) = 0$
in Umgebung von p. $\square$

Folgerung: $(\nabla_X \Psi)_p$ hängt nur von X_p ab
und nur von Ψ auf einer Umgebung von p.

3. **Def** Sei E ein endlich dimensionaler reeller Vektorr.
Ein Tensor T vom Typ (m,n) ist eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{m} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n} \to \mathbb{R},$$

d.h. wir können T auffassen als lineare Abbildung

$$E^* \otimes \ldots \otimes E^* \otimes E \otimes \ldots \otimes E \to \mathbb{R}$$

d.h. als ein Element

$$T \in \mathrm{Hom}(E^* \otimes \ldots \otimes E^* \otimes E \otimes \ldots \otimes E), \mathbb{R})$$
$$\cong E \otimes \ldots \otimes E \otimes E^* \otimes \ldots \otimes E$$

Bsp Typ $(0,1)$ $\hat{=}$ Linearform

Typ $(1,0)$ $\hat{=}$ Vektor in E

Typ $(0,2)$ $\hat{=}$ Bilinearform auf E usw.

Ist M eine diff'bare l-Mannigfaltigkeit, so bilden die Tensoren vom Typ (m,n) zu $T_pM = E$ ein Vektorbündel über M dessen Fasern Dimension l^{m+n} haben. Ein glatter Schnitt τ in dies Vektorbündel ordnet jedem $p \in M$ also einen Tensor τ_p vom Typ (m,n) auf T_pM zu.

Bsp: Die Riemannsche Metrik ist ein glattes Tensorfeld vom Typ $(0,2)$.

Schreibe $\mathcal{T}^{m,n}(M)$ für die Menge aller glatten

Schnitte, also z.B.

$$\mathcal{T}^{0,1}(M) = \Gamma^\infty(T^*M \to M)$$
$$\mathcal{T}^{1,0}(M) = \Gamma^\infty(TM \to M)$$

und für eine Riemannsche Metrik gilt $g \in \mathcal{T}^{0,2}(M)$.

4. <u>Satz</u> Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Schreibe $\mathcal{X}(M) = \Gamma^\infty(TM \to M)$
$\mathcal{X}^*(M) = \Gamma^\infty(T^*M \to M)$

Dann sind $\mathcal{X}(M)$ und $\mathcal{X}^*(M)$ Moduln über dem Ring $C^\infty(M,\mathbb{R})$ (i.e. das Produkt einer glatten Funktion mit einem glatten Vektorfeld ist wieder ein glattes Vektorfeld).

Angenommen,

$$\Phi : \underbrace{\mathcal{X}^*(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^*(M)}_{m} \times \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M)}_{n} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

ist eine multilineare Abbildung (über $C^\infty(M,\mathbb{R})$)

[d.h. Φ ist additiv in jedem der $m+n$ Einträge und für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt

$$f \cdot \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, X_n) =$$
$$\Phi(\alpha_1, \ldots, f\cdot\alpha_k, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, X_n)$$
$$= \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, fX_j, \ldots, X_n)$$

für $1 \le k \le m$, $1 \le j \le n$].

Dann existiert genau ein Tensorfeld τ vom Typ (m,n) so, dass für alle $p \in M$, alle $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{X}^*(M)$ und alle $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m, X_1, \dots, X_n)(p) = \tau(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{m,p}, X_{1,p}, \dots, X_{n,p}).$$

<u>Beweis</u> in fünf elementaren Schritten.

<u>1. Schritt</u> Angenommen, $X_{j,p} = 0$. Dann folgt

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m, X_1, \dots, X_n)(p) = 0$$

<u>Denn:</u> Sei $y: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ Karte mit $p \in U$. Sei Θ wie in Korollar A, §3.3. Auf U gilt

$$X_{j,q} = \sum_{i=1}^{l} c_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q .$$ Nun gilt

$$\Theta^2 \Phi(\dots) = \Phi(\dots, \Theta^2 X_j, \dots)$$

$$= \Phi(\dots, \sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i Y_i, \dots)$$

$$\left[\text{wobei } \tilde{c}_i(q) = \begin{cases} c_i(q)\Theta(q) & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad Y_i(q) = \begin{cases} \Theta(q)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i \Phi(\dots, Y_i, \dots)$$

Da $\tilde{c}_i(p) = 0$ für $i = 1, \dots l$ folgt

$\underbrace{\Theta^2(p)}_{=1} \Phi(\ldots)(p) = 0 \Rightarrow \Phi(\ldots)(p) = 0.$

<u>2. Schritt</u> Genauso gilt: ist $\alpha_{k,p} = 0$, so ist

$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, X_n)(p) = 0$

<u>3. Schritt</u> Ist $\beta_p = \alpha_{k,p}$ od. $Z_p = X_{j,p}$, so folgt

$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, X_n)(p) = \Phi(\alpha_1, \ldots \beta, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, X_n)(p)$

$= \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots, Z, \ldots, X_n)(p) = 0$, denn

$(X_j - Z)_p = 0$ bzw $(\alpha_k - \beta)_p = 0.$

<u>4. Schritt</u> Ist also für $p \in M$

$u_1, \ldots, u_m \in T^*_pM$ und $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ gegeben,

so wähle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathcal{X}(M)$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}(M)$

mit $\alpha_{j,p} = u_j$ $\quad X_{i,p} = v_i$ $\quad j = 1, \ldots, m$
$i = 1, \ldots, n$

und setze $T_p(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, X_1, \ldots X_n)(p)$

Das ist eine wohldefinierte Abbildung und T_p ist

Tensor vom Typ (m, n).

5. Schritt $\mathcal{T}$ ist glatt. Sei $p \in M$, sei $y: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ Karte mit $p \in U$. Sei Θ Buckelfunktion mit $\operatorname{supp}(\Theta) \subseteq U$ und $\Theta(q) = 1$ für alle q in einer Umgebung W von p. Setze

$$\alpha_{i,q} = \begin{cases} \Theta(q)\, dy_{i,p} & q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X_{i,q} = \begin{cases} \Theta(q) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q & q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $q \in W$, $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, l\}$, $k_1, \dots k_n \in \{1, \dots l\}$

$$\mathcal{T}_q\left(dy_{j_1,q}, \dots, dy_{j_m,q}, \frac{\partial}{\partial y_{k_1}}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{k_n}}\Big|_q\right) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m, X_1, \dots, X_n)(q)$$

glatt $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ ist glatt auf W $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ ist glatt auf M. $\square$

#

5. Def Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir setzen für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\Phi_Y(X, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \quad (*)$$

Offensichtlich ist Φ $\mathbb{R}$-linear in allen drei Argumenten.

(*) Koszul-Formel

Beobachtungen Sei $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

(a) $\Phi_Y(h\cdot X, Z) = h \cdot \Phi_Y(X,Z)$

Denn: $\Phi_Y(h\cdot X, Z) = h\cdot \Phi_Y(X,Z) + Y(h)\cdot g(Z,X)$

$$- Z(h)\cdot g(X,Y) + \underbrace{g(Y, Z(h)\cdot X)}_{=Z(h)\cdot g(Y,X)} - \underbrace{g(Z, Y(h)\cdot X)}_{Y(h)\cdot g(Z,X)}$$

$$= h\cdot \Phi_Y(X,Z)$$

(b) $\Phi_Y(X, h\cdot Z) = h\cdot \Phi_Y(X,Z)$

Denn: $\Phi_Y(X, h\cdot Z) = h\cdot \Phi_Y(X,Z) + X(h)\cdot g(Y,Z)$

$$+ Y(h)\cdot g(Z,X) - \underbrace{g(X, Y(h)\cdot Z)}_{Y(h)\, g(X,Z)} + \underbrace{g(Y, -X(h) Z)}_{-X(h)\cdot g(Y,Z)}$$

$$= h\cdot \Phi_Y(X,Z).$$

(c) $\Phi_{h\cdot Y}(X,Y) = h\cdot \Phi_Y(X,Z) + 2\cdot X(h)\cdot g(Y,Z)$

Denn: $\Phi_{h\cdot Y}(X,Y) = h\cdot \Phi_Y(X,Z) + X(h)\cdot g(Y,Z)$

$$\underbrace{- Z(h)\, g(X,Y) + g(X, Z(h) Y)}_{=0}$$

$$+ X(h)\cdot g(Z,Y)$$

$$= h\cdot \Phi_Y(X,Z) + 2X(h)\cdot g(Y,Z)$$

6. <u>Theorem</u> Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gibt es genau einen torsionsfreien metrischen affinen Zusammenhang, den <u>Levi-Civita-Zusammenhang</u> ∇.

<u>Bew</u>: Für $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \Phi_Y(X,Z) \qquad (*)$$

Aus Beobachtung (b) folgt: $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$

Aus Beobachtung (a) und (c) folgt: ∇ ist ein affiner Zusammenhang.

<u>Beh</u>: ∇ ist torsionsfrei:

$$\begin{aligned}
2\cdot g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= \Phi_Y(X,Z) - \Phi_X(Y,Z) \\
&= -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[X,Z]) \\
&\quad + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Z,Y]) \\
&\quad + g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X]) = 2\cdot g(Z,[X,Y]) \quad (\checkmark)
\end{aligned}$$

<u>Beh</u>: ∇ ist metrisch:

$$2\cdot(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)) = \Phi_Y(X,Z) + \Phi_Z(X,Y)$$

(*) (b) sagt: für X, φ vorgegeben ist

$Z \longmapsto \Phi_\varphi(X,Z)$ eine 1-Form $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Also gibt es (da g nicht ausgeartet ist)

genau ein $A \in \mathfrak{X}(M)$ mit

$\alpha(Z) = g(A, Z)$. Setze $\nabla_X \varphi := A$.

$= 2 \cdot X(g(Y,Z))$

Damit ist die Existenz gezeigt.

Sei nun ∇ ein beliebiger torsionsfreier metrischer affiner Zusammenhang.

<u>Beh</u>: $2 \cdot g(\nabla_X Y, Z) = \Phi_Y(X,Z)$.

<u>Denn</u> $X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))$

$$= g(\nabla_X Y, Z) + \underline{g(\nabla_X Z, Y)} + g(\underline{\nabla_Y Z, X}) + \underline{g(Z, \nabla_Y X})$$
$$- \underline{g(\nabla_Z X, Y)} - \underline{g(X, \nabla_Z Y)}$$

und

$$- g(X, [Y,Z]) + g(Y, [Z,X]) + g(Z, [X,Y])$$
$$= - g(\underline{X, \nabla_Y Z} - \underline{\nabla_Z Y}) + g(\underline{Y, \nabla_Z X} - \underline{\nabla_X Z}) + g(Z, \nabla_X Y - \underline{\nabla_Y X})$$

$\square$

7. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen l-Mannigfaltigkeit (M,g).

Sei $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ eine Karte. Bezüglich der Koordinaten $x_1, \dots, x_l$ auf U definieren wir die <u>Christoffel-Symbole</u> Γ_{ij}^k

durch

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p$$

Wegen (T) folgt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \underset{\text{Schwarz}}{=} 0$$

also $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{jk}^k$

Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k sind also ℓ^3 glatte reelle Funktion auf U. Ist

$$X = \sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \text{ so ist}$$

$$(\nabla_X Y)(f) = \sum_{i,j=1}^{\ell} \xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k=1}^{\ell} \xi_i \Gamma_{ij}^k \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Wir definieren jetzt den Paralleltransport von Tangentialvektoren längs glatter Kurven.

8. <u>Def</u> Sei $c : (a,b) \to M$ eine glatte Kurve. Ein <u>glattes Vektorfeld längs c</u> ist eine glatte Abbildung $X : (a,b) \to TM$ mit $X_t \in T_{c(t)} M$ für alle $t \in (a,b)$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ (a,b) \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "c"] & M \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wir setzen $\mathfrak{X}(c) = \{ X : (a,b) \to TM \mid X$ glattes Vektorfeld längs $c \}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{X}(c)$ ein reeller Vektorraum.

<u>Bsp</u> (a) $X_t = \dot{c}(t)$ Geschwindigkeitsvektor

(b) $Y \in \mathfrak{X}(M)$ glattes Vektorfeld,

$$X_t = Y_{c(t)}$$

9. <u>Satz</u> Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf einer diff'baren Mannigfaltigkeit M und sei $c:(a,b)\to M$ eine glatte Kurve. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt}:\mathfrak{X}(c)\longrightarrow\mathfrak{X}(c)\quad\text{mit}$$

(i) für $h\in C^\infty((a,b),\mathbb{R})$ und $X\in\mathfrak{X}(c)$ gilt

$$\frac{\nabla}{dt}(h\cdot X)=h'\cdot X+h\frac{\nabla}{dt}X$$

(ii) für $Y\in\mathfrak{X}(M)$ und $X_t=Y_{c(t)}$ gilt

$$\frac{\nabla}{dt}X=\nabla_{\dot c}X$$

Falls ∇ der Levi-Civita Zusammenhang einer Riemannschen Metrik g ist, so gilt außerdem

(iii) für $X,Y\in\mathfrak{X}(c)$, $f(s)=g(X_s,Y_s)$

ist $f'(s)=g\left(\left(\frac{\nabla}{dt}X\right)_s,Y_s\right)+g\left(X_s,\left(\frac{\nabla}{dt}Y\right)_s\right)$

für alle $s\in(a,b)$.

<u>Beweis</u> <u>Zur Eindeutigkeit.</u> Sei $s \in (a,b)$, $p = c(s)$.

Sei $y : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ Karte mit $p \in U$. Sei Θ Buckelfunktion mit $\operatorname{supp}(\Theta) \subseteq U$ und $\Theta = 1$ in einer Umgebung W von p. Aus (i) folgt mit $h(s) := \Theta(c(s))$, $X \in \mathfrak{X}(c)$ beliebig, dass <u>für $c(s) \in W$</u>

$$\frac{\nabla}{dt}(h^2 \cdot X)_s = \underbrace{2h'(s)h(s)}_{=0} X_s + \underbrace{h^2(s)}_{=1}\left(\frac{\nabla}{dt}X\right)_s = \left(\frac{\nabla}{dt}X\right)_s$$

In lokalen Koordinaten

$$X_s = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s) \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{c(s)}$$

Setze

$$h_i(s) := \begin{cases} 0 & c(s) \notin U \\ h(s)\,\xi_i(s) & c(s) \in U \end{cases}$$

$$Z_{i,s} = \begin{cases} 0 & c(s) \notin U \\ h(s)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{c(s)} & c(s) \in U \end{cases}$$

$$\Rightarrow h^2 X = \sum_{i=1}^{l} h_i(s) Z_i$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dt}(h^2 X)_s = \sum_{i=1}^{l}\left(h_i'(s) Z_{i,s} + h_i(s)\left(\frac{\nabla}{dt}Z_i\right)_s\right)$$

$$\underset{c(s)\in W}{=} \sum_{i=1}^{l}\left(\xi_i'(s)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{c(s)} + \xi_i(s)\nabla_{\dot c(s)}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

damit ist $\frac{\nabla}{dt}X$ nahe s eindeutig festgelegt.

Wenn wir umgekehrt in lokalen Koordinaten definieren

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\sum_{i=1}^{l} \xi_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \sum_{i=1}^{l}\left(\xi_i' \frac{\partial}{\partial y_i} + \xi_i \cdot \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial y_i}\right), \text{ so}$$

sind (i) und (ii) erfüllt (nachrechnen). Wegen der bereits gezeigten Eindeutigkeit ist die R.S. koordinatenunabhängig und definiert die gewünschte Funktion (lokal) und damit auch global (denn verschiedene Karten liefern die gleiche R.S.).

Zu (iii) $f(s) = g(X_s, Y_s)$. Lokal

$$X_s = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{c(s)} \qquad Y_s = \sum_{j=1}^{l} \eta_j(s) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{c(s)}$$

$$\Rightarrow f(s) = \sum_{i,j} \xi_i(s) \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{c(s)} \cdot \eta_j(s)$$

$$g\left(\frac{\nabla}{dt} X, Y\right) = \sum_{i,j}\Big(\xi_i'(s) \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \cdot \eta_j(s)$$

$$+ \xi_i(s) \cdot g\left(\nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \cdot \eta_j(s)\Big)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{\nabla}{dt} X, Y\right) + g\left(X, \frac{\nabla}{dt} Y\right) = f'(s) \qquad \square$$

10. <u>Def</u> Sei $c : (a,b) \to M$ eine glatte Kurve, sei ∇ ein affiner Zusammenhang. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(c)$ heißt <u>parallel</u> (längs c), wenn gilt

$$\frac{\nabla}{dt} X = 0$$

In lokalen Koordinaten bedeutet das für $X = \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, dass

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(\xi_i' \frac{\partial}{\partial y_i} + \xi_i \cdot \nabla_{\dot c} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = 0$$

Das ist eine <u>lineare Differentialgleichung</u>, die folglich eine Lösung hat. Genauer: Zu gegebenen $s_0 \in (a,b)$ und $v \in T_{c(s_0)} M$ gibt es <u>genau ein</u> $X \in \mathfrak{X}(s)$ mit

(i) $X_{s_0} = v$ (Anfangsbedingung)

(ii) $\frac{\nabla}{dt} X = 0$ (LDGL)

Beachte: Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(c)$ parallel, $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch $aX + bY$ parallel.

Bem Schreiben wir $\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k(t) \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{c(t)}$

so erhalten wir in lokalen Koordinaten die Formel

$$\frac{\nabla}{dt} X_s = \sum_{k=1}^{l} \Big(\xi_k' + \sum_{i,j=1}^{l} \gamma_i \cdot \xi_j \cdot \Gamma_{ij}^{k} \Big) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

die DGL für Paralleltransport ist also

$$\xi_k' + \sum_{i,j} \gamma_i \cdot \xi_j \cdot \Gamma_{ij}^{k} = 0 \qquad k = 1, \dots, l$$

– Einschub zu Tangentialvektoren –

Angenommen, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ ist offen und $L \subseteq W$ ist eine eingebettete l-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei U offen in L und sei $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ eine Karte für L, $x = (x_1, \dots, x_l)$. Sei $p \in U$, $v = x(u)$

Betrachte die Kurve $c(t) = x^{-1}(v + te_i)$ $\quad e_i = (0 \dots 0 1 0 \dots 0)$

i-ter Einheitsvektor in $\mathbb{R}^l$, $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to L$. Dann

ist $\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \mathrel{\hat{=}} \left(p, \left.\frac{d}{dt} c\right|_{t=0}\right)} \in T_p L \subseteq T_p U = \{p\} \times \mathbb{R}^l$
$\subseteq U \times \mathbb{R}^l$

Denn: ist φ glatte Funktion auf einer offenen Umgebung $V \subseteq W$ von p, so ist $\varphi|_L$ glatte Funktion auf L

und $\frac{d}{dt}\left(\varphi \circ x^{-1}(v + te_i)\right) = \left\langle \operatorname{grad} \varphi, \left.\frac{d}{dt} c\right|_{t=0} \right\rangle$

$\overset{\text{Def}}{=} \left.\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\right|_p$

11. <u>Beispiel</u> (α) $M = U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, die Riemannsche Metrik ist gegeben durch $x = id_U$ Karte

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij} \quad \text{(Standard-Skalarprodukt)}$$

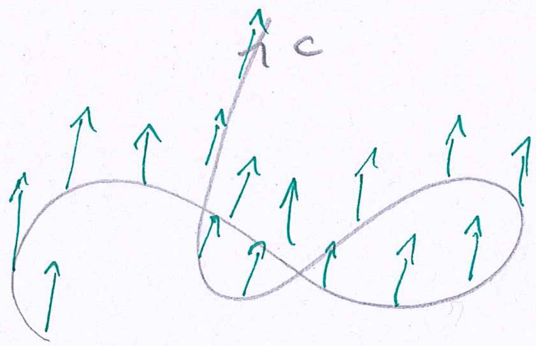
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad \text{(vgl § 3 Anfang)}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^k = 0$$

Sei nun $c : (a,b) \to U$ glatte Kurve, $s_0 \in (a,b)$ und $p = c(s_0)$. Die DGL für parallele Vektorfelder ist also $X = \sum_{i=1}^{l} \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\xi_i' \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_i \cdot \underbrace{\nabla_{\dot c} \frac{\partial}{\partial x_i}}_{=0} \right) = 0 \Rightarrow \xi_i' = 0$$

$$\Rightarrow \xi_i = \text{const}$$



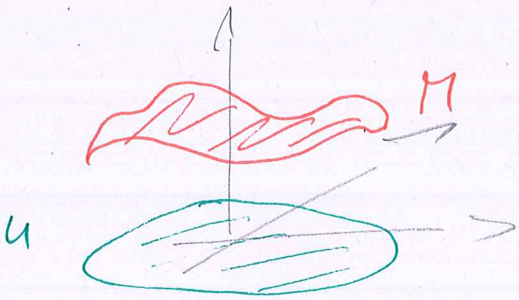
#

Beispiel (b) $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ offen, $\alpha : U \to \mathbb{R}$ glatt, $M = \{ (u_0, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{R} \times U \mid u_0 = \alpha(u_1, \dots, u_\ell) \}$

Graph der Funktion α

Karte $x : M \to U$

$(u_0, \dots, u_\ell) \mapsto (u_1, \dots, u_\ell)$



Sei $p \in M$, $p = (\alpha(v), v)$ für ein $v \in U$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \mathrel{\hat=} \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fußpunkt}}}{p}, \overbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}(v), 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0}^{\text{Vektor in } \mathbb{R}^\ell} \Big) \in M \times \mathbb{R}^\ell$$

Wir wählen die durch $\mathbb{R}^{\ell+1}$ gegebene Riemannsche Metrik,

d.h. $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}(v) \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}(v) + \delta_{ij}$

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} dx_i \otimes dx_j + \sum_{k=1}^{\ell} dx_k \otimes dx_k$$

Die Christoffel-Symbole berechnen wir mit der Koszul-Formel. Im Folgenden kurz $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$2\, g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \partial_i\, g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j\, g(\partial_k, \partial_i) - \partial_k\, g(\partial_i, \partial_j)$$

denn $\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0$ (Lemma von Schwarz)

$$\partial_i \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}(v + t \cdot e_i)\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$$, damit

$$2 g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial \alpha}{\partial u_k} + \cancel{\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_k}} + \cancel{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_k}\frac{\partial \alpha}{\partial u_i}} + \frac{\partial \alpha}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_i}$$

$$- \cancel{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_k \partial u_i}\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}} - \cancel{\frac{\partial \alpha}{\partial u_i}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_k \partial u_j}} = 2\,\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial u_k}$$

$$\Rightarrow g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial \alpha}{\partial u_k}$$

Andererseits gilt $g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \sum_{u=1}^{l} \Gamma_{ij}^{u}\, g(\partial_u, \partial_k)$

$$= \sum_{u=1}^{l} \Gamma_{ij}^{u} \frac{\partial \alpha}{\partial u_u}\frac{\partial \alpha}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{k}$$

Wir müssen auflösen nach den Γ_{ij}^k. Setze dazu kurz

$$\Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^l \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_l} \end{pmatrix} \qquad H_{ij} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$$

$$v^2 = \langle a, a\rangle = \sum_{n=1}^{l}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_n}\right)^2$$

LGS

$$H_{ij}\cdot a = \langle \Gamma_{ij}, a\rangle a + \Gamma_{ij}$$

$$\Rightarrow H_{ij}\cdot v^2 = \langle \Gamma_{ij}, a\rangle v^2 + \langle \Gamma_{ij}, a\rangle = (1+v^2)\langle \Gamma_{ij}, a\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \Gamma_{ij}, a\rangle = \frac{v^2}{1+v^2} H_{ij}$$

also wird aus dem LGS $H_{ij}\cdot a = \frac{v^2}{1+v^2} H_{ij}\, a + \Gamma_{ij}$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij} = \frac{1}{1+v^2} H_{ij}\, a \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{1+v^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial \alpha}{\partial u_k}}$$

12. <u>Def</u> Sei (M,g) eine Riemannsche l-Mannigfaltigkeit. Eine glatte Kurve $c:(a,b)\to M$ heißt <u>Geodätische</u>, falls gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\dot c = 0$$

("2. Ableitung von c ist Null")
<u>$\dot c$ ist parallel längs c</u>

Dann folgt $\frac{d}{dt}g(\dot c,\dot c) = 2\cdot g\Big(\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot c}_{=0},\dot c\Big) = 0$

und damit $g(\dot c,\dot c) = \text{const.}$

In lokalen Koordinaten lautet die Gleichung oben mit $\dot c(t) = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{c(t)}$

$$\gamma_k' + \sum_{i,j=1}^{l} \Gamma_{ij}^k\cdot\gamma_i\cdot\gamma_j = 0$$

, vgl §3.10.

Diese DGL hat (zumindest für kleine Zeiten t) eine eindeutige Lösung. Genauer (vgl §2.16):

Gegeben $p\in M$ und $v\in T_pM$ gibt es ein (maximales) offenes Intervall $J\subseteq\mathbb{R}$ mit $0\in J$ und eine glatte Kurve $c:J\to M$ mit

$c(0)=p$, $\dot c(0)=v$ (Anfangsbedingung)

und $\frac{\nabla}{dt}\dot c = 0$

Beispiel (a) aus § I.11 weitergeführt:

$M = U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, $x = id_U \leadsto \Gamma_{ij}^k = 0$, die

Gleichung heißt also $r_k' = 0$ d.h. $r_k = \text{const}$

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{r_i}_{\text{Konstanten}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)}$$

gegeben $p \in U$, $(p, \underbrace{w_1, \dots, w_l}_{=w}) \in T_p U$

$c(t) = p + t \cdot w$ ist Lösung. Die Geodätischen in U sind gerade Linien, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

(b) aus § I.11 weitergeführt $\alpha : U \to \mathbb{R}$ glatt

$$M = \{ (u_0, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid u_0 = \alpha(u_1, \dots, u_l) \}$$

Karte $x(u_0, \dots, u_l) = (u_1, \dots, u_l)$ $\quad x : M \xrightarrow{\approx} U$

$$g(\partial_i, \partial_j) = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} + \delta_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{1+v^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial \alpha}{\partial u_k} \qquad v^2 = \sum_{n=1}^{l} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_n} \right)^2$$

Die DGL für Geodätische lautet also für

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{l} r_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)} \qquad \nu^2 = \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}\right)^2$$

$$r_k' + \frac{1}{1+\nu^2} \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial \alpha}{\partial u_k} r_i r_j = 0$$

Wir setzen wieder $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l \end{pmatrix}$, $r' = \begin{pmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_l' \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_l} \end{pmatrix}$

$H = \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}\right)_{i,j=1}^{l}$ (Hesse-Matrix von α)

$h = \langle r, Hr \rangle \quad \rightsquigarrow$ DGL $\quad r' + \frac{1}{1+\nu^2} h a \qquad$ d.h. $\; r' = \frac{-1}{1+\nu^2} h a$

Was bedeutet das geometrisch? Setze $\varkappa(t) = X(c(t))$

$\Rightarrow c(t) = (\alpha(\varkappa(t)), \varkappa_1(t), \dots, \varkappa_l(t))$

$$c'(t) = \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \varkappa_j'(t), \varkappa_1'(t), \dots, \varkappa_l'(t) \right).$$

$$\dot{c}(t) = \sum_{j=1}^{l} r_j'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{c(t)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fusspunkt}}}{p}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j}, 0 \dots 0, \underset{\substack{| \\ j}}{1}, 0 \dots 0)$$

$\Rightarrow \dot{c}(t) = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fusspunkt}}}{c(t)}, c'(t))$ insbesondere ist $r_j = \varkappa_j'$

$\Rightarrow c'(t) = (\langle a, r \rangle, r)$

und $c''(t) = (\underbrace{\langle r, Hr\rangle}_{=h} + \langle a, r'\rangle, r') = (h + \langle a, r'\rangle, r')$

Beh: c Geodätische gdw $c''(t)$ auf $T_{c(t)}M$ senkrecht steht

Bew: c Geodätisch $\Rightarrow r' = \frac{-1}{1+\nu^2} h a$

$$\Rightarrow c'' = \left(h - \frac{\nu^2}{1+\nu^2} h, -\frac{1}{1+\nu^2} h a \right) = \left(\frac{1}{1+\nu^2} h, -\frac{1}{1+\nu^2} h a \right)$$

$$\Rightarrow \left\langle c'', \left(\underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial u_j}}_{=a_j}, 0 - 0, \underset{j}{1}, 0 - 0 \right) \right\rangle = \frac{1}{1+\nu^2} h a_j - \frac{1}{1+\nu^2} h a_j = 0$$

d.h. $c'' \perp T_{c(t)}M$

Umgekehrt: $c'' \perp T_{c(t)}M \Rightarrow \left\langle (h + \langle a, r'\rangle, r'), \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u_j}, 0 - 0 \underset{j}{1} 0 - 0 \right) \right\rangle = 0$

$$= a_j (h + \langle a, r'\rangle) + r_j' = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, l$$

$$\Rightarrow a(h + \langle a, r'\rangle) + r' = 0$$

$$\Rightarrow \nu^2 (h + \langle a, r'\rangle) + \langle a, r'\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nu^2 h + (1+\nu^2)\langle a, r'\rangle = 0 \Rightarrow \langle a, r'\rangle = \frac{-\nu^2 h}{(1+\nu^2)}$$

$$\Rightarrow a \underbrace{\left(h - \frac{\nu^2 h}{1+\nu^2} \right)}_{h\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right)} + r' = 0$$

$$\Rightarrow a h \frac{1}{1+\nu^2} + r' = 0$$

$\square$

#

13. Def Sei M eine diff'bare Mannigfaltigkeit. Wir nennen eine stetige Kurve $c : [a,b] \to M$ *glatt*, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt und eine glatte Kurve $\tilde{c} : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to M$ mit $\tilde{c}|_{[a,b]} = c$. Wir nennen c *stückweise glatt*, wenn es $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$ gibt so, dass $c|_{[s_{k-1}, s_k]}$ glatt ist, für $k = 1, \ldots, n$.

Ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so (*) setzen wir $\|\dot{c}(s)\| = g(\dot{c}(s), \dot{c}(s))^{\frac{1}{2}}$ für $s \neq s_0, s_1, \ldots, s_n$ und definieren die *Länge* von c durch

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(s)\| \, ds.$$

(an den Knickstellen $s_0, \ldots, s_n$ ist $\|\dot{c}(s)\|$ nicht definiert, aber das macht nichts)

Beobachtungen (1) ist $c \neq \text{const}$, so ist $L(c) > 0$

(2) ist $\bar{c}(s) = c(a+b-s)$, so ist $\bar{c}(a) = c(b)$, $\bar{c}(b) = c(a)$ und $L(c) = L(\bar{c})$, denn

$$\dot{\bar{c}}(s) = -\dot{c}(a+b-s)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \|\dot{\bar{c}}(s)\| \, ds = -\int_b^a \|\dot{c}(s)\| \, ds = \int_a^b \|\dot{c}(s)\| \, ds$$

(*) Hier benutzen wir zum ersten Mal, dass g positiv definit ist!

(3) Ist $\alpha : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$ ein Diffeomorphismus mit $\alpha(\tilde{a}) = a$, $\alpha(\tilde{b}) = b$, so ist

$L(c \circ \alpha) = L(c)$ $\quad c\circ\alpha : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to M$

denn $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \| \dot{c}(\alpha(t)) \| \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_a^b \| \dot{c}(t) \| \, dt$

und für $\tilde{c}(s) = c(\alpha(s))$ ist $\dot{\tilde{c}}(s) = \dot{c}(\alpha(s)) \underbrace{\alpha'(s)}_{>0}$

Für $p, q \in M$ setzen wir

$$\Omega(M, p, q) = \{ c : [0,1] \to M \mid c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = p,\ c(1) = q \}$$

<u>Lemma</u> Wenn M zush. ist, so ist $\Omega(M, p, q) \neq \emptyset$, für alle $p, q \in M$

<u>Beweis</u> Setze $C(p) = \{ \tilde{q} \in M \mid \Omega(\Omega, p, \tilde{q}) \neq \emptyset \}$.

Dann ist $C(p) \neq \emptyset$ (weil $p \in C(p)$) und für $\tilde{q} \in C(p)$ ist $C(\tilde{q}) = C(p)$. Da M lokal wegzush. ist, ist $C(p)$ offen. Die Menge $\{ C(\tilde{q}) \mid \tilde{q} \in M \}$ bildet also eine Partition von M in offene Teilmengen $\Rightarrow C(p) = M$ □

14. <u>Def</u> Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $p, q \in M$ definieren wir

$$d(p,q) = \inf \{ L(c) \mid c \in \Omega(M, p, q) \}$$

Beobachtung

(1) $d(p,q) = \inf \{ L(c) \mid c : [a,b] \to M$ stückweise glatt mit $c(a) = p,\ c(b) = q \}$

nach §3.13 (3)

(2) $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$ nach §3.13 (2)

(3) $d(p,p) = 0$ (mit $c(t) = p = \text{const}$)

(4) Für alle $o \in M$ ist $d(p,q) \leq d(p,o) + d(o,q)$

Denn: $c \in \Omega(M, p, o)$ $\tilde{c} \in \Omega(M, o, q)$

$$(c * \tilde{c})(s) = \begin{cases} c(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{c}(2s-1) & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases} \qquad c * \tilde{c} \in \Omega(M, p, q)$$

$$L(c * \tilde{c}) = L(c) + L(\tilde{c})$$

15. Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^l$ offen und zush. Sei d_{euc} die euklidische Metrik auf U, $d_{euc}(p,q) = (\|p-q\|_2)^{\frac{1}{2}}$.

Dann gilt $d(p,q) \geq d_{euc}(p,q)$.

Falls $H = \{ s \cdot p + (1-s) q \mid 0 \leq s \leq 1 \} \subseteq U$ gilt, so ist $d(p,q) = d_{euc}(p,q)$.

Beweis Es gilt für $\dot{c}(s) = (c(s), c'(s)) \in T_{c(s)} U$, dass $\|\dot{c}(s)\| = (\|c'(s)\|_2)^{\frac{1}{2}}$

Sei $v = q - p$. Dann folgt für $c \in \Omega(M,p,q)$

$\| \dot c(s) \| \cdot \|v\|_2 \underset{\text{CSU}}{\geq} \langle c'(s), v \rangle$, also

$$\int_0^1 \| \dot c(s)\|_2 \|v\|_2 \, ds = \int_0^1 \|c'(s)\|_2 \cdot \|v\|_2 \, ds$$

$$\geq \left\langle \int_0^1 c'(s)\, ds, v \right\rangle = \langle c(1) - c(0), v \rangle = \|v\|_2^2$$

also $L(c) \geq \|v\|_2^2$. Ist $c(s) = s \cdot p + (1-s) q$, so ist $L(c) = \|v\|_2$ $\square$

16. <u>Theorem</u> Sei (M,g) eine zush. Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei d wie in §3.14. Dann ist d eine Metrik auf M (die <u>innere Metrik</u> von (M,g)) und die Topologie von M ist durch d gegeben.

<u>Beweis</u> $\overset{\text{Bch}}{\cancel{\text{Zz}}}$ d ist positiv definit, d.h. $p \neq q$ $\Rightarrow d(p,q) > 0$. (Dann folgt mit §3.14, dass d eine Metrik ist.)

<u>Denn</u>: Sei $p \neq q$, sei $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^e$ Karte mit $p \in U$. OE $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^e$.

Schreibe $g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ sowie

$$g_{euc} = \sum_u dx_u \otimes dx_u \qquad \text{auf } U \subseteq M$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{B}_\varepsilon(0) \subseteq U'$ gilt und setze $K = x^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(0)) \subseteq U$. Dann ist K kompakt. Folglich gibt es reelle Zahlen $\lambda, \mu > 0$ so, dass für alle $q \in K$, $v \in T_qM$ gilt

$$\lambda \cdot \sqrt{g_{euc}(v,v)} < \sqrt{g(v,v)} < \mu \cdot \sqrt{g_{euc}(v,v)}$$

denn: K ist kompakt und auf $\mathbb{R}^\ell$ sind alle Normen äquivalent. $\|v\|_{euc} = (g_{euc}(v,v))^{1/2}$ und $\|v\| = (g(v,v))^{1/2}$ sind beides Normen auf T_qM.

Ist nun $q \in M$ und $c \in \Omega(M,p,q)$ so gilt

(a) Falls $c([0,1]) \subseteq K$, so ist

$$L(c) > \lambda \cdot \|w\|_2 \quad , \quad w = x(q) - x(p) \in \mathbb{R}^\ell$$

(b) Falls $c([0,1]) \not\subseteq K$ setze

$r = \inf\{s \in [0,1] \mid c(s) \notin K\}$, dann ist $0 < r$ (weil K umgebung von p ist) und damit

$$L(c) \geq \int_0^r \|\dot{c}(s)\|\, ds > \lambda \cdot \varepsilon$$

Es folgt in jedem Falle: $p \neq q \Rightarrow d(p,q) > 0$, nach § 3.14 ist d also eine Metrik.

Weiter gilt für $q \in K$, dass

$$\lambda \cdot \| x(p) - x(q) \|_2 \leq d(p,q) \leq \mu \cdot \| x(p) - x(q) \|$$

Damit folgt, dass jede d-Umgebung von p auch eine Umgebung von p ist, und umgekehrt. Also induziert d die Topologie von M im Kleinen, und damit auch im Großen. $\square$

<u>Korollar</u> Wenn eine glatte Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Metrik g zulässt, so ist M metrisierbar (vgl §2.2). Insbesondere besitzt Alexandrovs Halbgerade keine Riemannsche Metrik.

<u>Bemerkung</u> Die Umkehrung gilt auch: ist M eine diff'bare Mannigfaltigkeit und ist M (als topologischer Raum) metrisierbar, so gibt es auf M auch eine Riemannsche Metrik g.

$\#$

<u>Beispiel</u> $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ mit Standard-Metrik

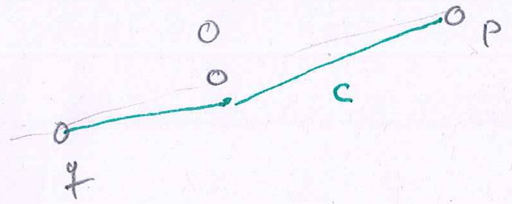
$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$ $\quad x = id_M$

Für $p, q \in M$ ist $d(p,q) = \|p-q\|_2$ denn: ist

$0 \notin \{ sp + (1-s) q \mid 0 \leq s \leq 1 \}$, so folgt das aus § 3.15.

Ist $0 \in \{ sp + (1-s) \cdot q \mid 0 \leq s \leq 1 \}$, so gibt es stückweise

linearen Kurven c mit $L(c) \leq \|p-q\|_2 + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$



In diesem Fall gibt es aber keine Kurve $c \in \Omega(M, p, q)$

mit $L(c) = d(p,q)$.

<u>Beachte:</u> Ist $c : [0,1] \to M$ eine Geodätische,

so ist $L(c) = \|\dot{c}(0)\|$

Betrachte die DGL für Geodätische,

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$$

Zu $p \in M$, $v \in T_pM$ gibt es dann eine Lösungskurve

$c = c_v : J \longrightarrow M$ mit $\dot{c}(0) = v$ $c(0) = p$, $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}_v = 0$

Wir können genauso gut die Kurve $\dot{c}_v : J \to TM$ betrachten, denn $c_v = \pi \circ \dot{c}_v$ für die kanonische Projektion $\pi : TM \to M$, die jedem Tangentialvektor $v \in T_pM$ seinen Fusspunkt $\pi(v) = p$ zuordnet. (Das entspricht der Reduktion einer DGL 2. ter Ordnung auf eine DGL 1. Ordnung). Wir definieren

$$\Omega = \bigcup_{v \in TM} \{v\} \times J_v \subseteq TM \times \mathbb{R}$$

sowie
$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\longrightarrow TM \\ (v,t) &\longmapsto \dot{c}_v(t) \end{aligned}$$

Das ist ein Fluss (vgl. 2.16) auf der Mannigfaltigkeit TM, der Geodätische Fluss.

Man nennt (M,g) geodätisch vollständig, wenn $\Omega = TM \times \mathbb{R}$ gilt, wenn also alle Geodäten c_v für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Bem In §2.16 waren Flüsse über glatte Vektorfelder eingeführt worden. Zum geodätischen Fluss gehört ein Vektorfeld auf TM, das man in lokalen Koordinaten mit Hilfe der Christoffel-Symbole aufschreiben kann. (1)

Für uns ist folgende Beobachtung nützlich.

17. Lemma Ist c eine Geodätische auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\tilde{c}(t) = c(\lambda t)$ eine Geodätische.

Beweis In lokalen Koordinaten $\dot{c}(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{c(t)}$

und $\dot{\tilde{c}}(t) = \lambda \cdot \dot{c}(\lambda t) \Rightarrow \dot{\tilde{c}}(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\lambda \gamma_j(\lambda t)}_{=:\tilde{\gamma}_j(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\tilde{c}(t)}$

$\tilde{\gamma}_j'(t) = \lambda^2 \gamma_j'(\lambda t)$

Ist also $\gamma_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i \cdot \gamma_j = 0$, so folgt

$$\tilde{\gamma}_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \tilde{\gamma}_i \cdot \tilde{\gamma}_j = 0 \qquad \square$$

Wir definieren die offenen Mengen

$$\mathcal{D} = \{ v \in TM \mid \{v\} \times [0,1] \subseteq \Omega \}$$

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM \quad \text{für } p \in M$$

1 Explizit: $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^l$ Karte auf M

$\pi : TM \to M$

$\rightsquigarrow$ Karte auf $(TM)_U$ Koordinaten $(q, \dot{q})$ durch

kein Ableitung!

$$y : (TM)_U \to U' \times \mathbb{R}^l$$

$$v \longmapsto (q(v), \dot{q}(v))$$

$$q(v) = x(\pi(v)) \qquad v = \sum_{j=1}^{l} \dot{q}_j(v) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\pi(v)}$$

$\rightsquigarrow$ Basis des Tangentialraums $T(TM)$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_l}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}$$

Geodätengleichung

$$q_k' = \dot{q}_k$$

$$(\dot{q}_k)' = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$$

Aus Lemma §3.17 folgt: ist $v \in \mathcal{D}_p$ und $\lambda \in [0,1]$, so ist $\lambda v \in \mathcal{D}_p$. Wir definieren die Riemannsche Exponentialfunktion exp durch

$$\exp : \mathcal{D} \to M \,, \quad v \mapsto c_v(1) = \pi\left(\Phi_1(v)\right)$$

oder $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M \,, \quad v \mapsto c_v(1)$

Es folgt sofort: Für $v \in T_pM$ ist die Abbildung $c_v(t) = c(t) = \exp_p(tv)$ eine Geodätische auf dem Intervall $[0,1]$. Offensichtlich ist exp und $\exp_p$ glatt (weil der geodätische Fluss Φ glatt ist).

18. Lemma Sei (M,g) Riemannsche l-Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p$ auf der offenen Menge

$$B_\varepsilon = \{v \in T_pM \mid \|v\| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{D}_p$$

ein Diffeomorphismus auf $\exp_p(B_\varepsilon) \subseteq M$ ist.

Beweis Sei $v_1, \dots, v_l \in \mathcal{D}_p$ eine Basis für T_pM. Für $c_j(t) = \exp_p(t \cdot v_j)$ gilt $\dot{c}_j(0) = v_j$, also hat $D(\exp_p)(0)$ Rang l. Nach dem Satz von lokalen Inversen ist $\exp_p$ nahe $0 \in T_pM$ ein Diffeomorphismus. □

19 Korollar Ist $w_1, \dots, w_\ell \in T_pM$ eine Orthonormalbasis ($g(w_i, w_j) = \delta_{ij}$), so gibt es eine Karte $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $U' = \{ v \in \mathbb{R}^\ell \mid \|v\|_2 < \varepsilon \}$ mit

$$\exp_p\left(x_1(q) \cdot w_1 + x_2(q) w_2 + \dots + x_\ell(q) \cdot w_\ell \right) = q. \quad ①$$

Solche Koordinaten auf M nahe p nennt man Normalkoordinaten. Normalkoordinaten bilden alle Geodäten durch p auf Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^\ell$ ab, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Wir verbessern das nun erheblich.

20. Satz Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq M$ von p und ein $\varepsilon > 0$ so, dass folgendes gilt:

---

① Also gilt $g_p = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_\ell \otimes dx_\ell$ im Punkt p.

(i) Für alle $q_1, q_2 \in W$ gibt es genau ein Geodätische c von q_1 nach q_2 mit $L(c) < \varepsilon$, $c(0) = q_1$, $c(1) = q_2$

(ii) Diese Geodätische c hängt glatt von q_1 und q_2 ab, d.h. $\dot{c}(0)$ hängt glatt von q_1, q_2 ab.

(iii) Für jedes $q \in W$ bildet $\exp_q$ die Menge $B_\varepsilon(0) \subseteq T_q M$ diffeomorph auf ein offene Menge $V_q \supseteq W$ ab.

Beweis Betrachte die glatte Abbildung

$$F : \mathcal{D} \to M \times M$$

$$v \mapsto (\pi(v) = q, \exp_q(v))$$

↑ Fusspunkt von $v \in T_q M$

Sei $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$. OE $x(p) = 0$.

Sei $c_j(t) = x^{-1}(t \cdot e_j)$ und sei $\mathcal{O}_j(t)$ der Nullvektor in $T_{c_j(t)} M$. Dann gilt

$$F(\mathcal{O}_j(t)) = (c_j(t), c_j(t))$$

Sei $\lambda_j(t) = t \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$. Dann ist

$$F(\lambda_j(t)) = (p, \exp_p(t \tfrac{\partial}{\partial x_j}\big|_p))$$

+

Also ist $DF(0)$ eine Blockmatrix der Form

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit ist F nahe $0 \in T_pM$

ein Diffeomorphismus (Satz vom lokalen Inversen).

Folglich gibt es eine kleine Umgebung V von p und ein $\varepsilon > 0$ so, dass F auf der Menge

$V_\varepsilon = \{ w \in TM \mid \pi(w) \in V \text{ und } \|w\| < \varepsilon \}$ ein

Diffeomorphismus ist. Wähle $W \subseteq M$ offene Umgebung von p ~~mit~~ $\supseteq F(V_\varepsilon) \supseteq W \times W$.

Sei $h: W \times W \to V_\varepsilon$ die Umkehrabbildung.

Da h glatt ist, folgt (ii). Da F auf V_ε injektiv ist, folgt (i), denn

$$L(c) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{c}(0)\| dt = \|\dot{c}(0)\|.$$

Da $\exp_q(v) = pr_2(F(v))$ ist

$$\exp_q(B_\varepsilon(0)) \supseteq W.$$

$\square$

Eine stückweise glatte Kurve $c \in \Omega(M, p, q)$ heißt **Kürzeste**, wenn gilt $L(c) = d(p,q)$.
Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass jede Kürzeste eine Geodätische ist und dass jede Geodätische im Kleinen eine Kürzeste ist.

21. **Lemma A** Sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sei (M,g) Riemannsch, sei $F: W \to M$ glatt, $(s,t) \mapsto F(s,t)$. Setze $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{d}{ds} F(s,t)$, $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d}{dt} F(s,t)$. Dann ist $\frac{\partial F}{\partial s}$ ein Vektorfeld längs $t \mapsto F(s,t)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ ein Vektorfeld längs $s \mapsto F(s,t)$. Es gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial F}{\partial t}$$

Beweis In lokalen Koordinaten $x: U \xrightarrow{\cong} U' \subseteq \mathbb{R}^l$, $f_j = x_j \circ F$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial F}{\partial s} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \left(\text{denn } \frac{\partial F}{\partial s}(x_j) = \frac{\partial f_j}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial F}{\partial s} = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{\partial f_j}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

□

Lemma B Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p : \underbrace{B_\varepsilon(0)}_{\subseteq T_pM} \xrightarrow{\cong} W \subseteq M$ ein Diffeomorphismus ist. Setze

$$S_r = \exp_p \{ w \in \underbrace{B_\varepsilon(0)}_{\subseteq T_pM} \mid \|w\| = r \} \quad \text{für} \quad 0 < r < \varepsilon$$

Dann trifft jede Geodätische der Form $c(t) = \exp_p(tv)$ die Mannigfaltigkeit S_r senkrecht.

Bew. Sei $s \mapsto w(s)$ eine glatte Kurve in T_pM, mit $\|w(s)\| = 1 = \text{const}$. Zu zeigen ist: Für jedes $0 < t < \varepsilon$ sind die Kurven $s \mapsto \exp(t \cdot w(s))$ und $t \mapsto \exp(t \cdot w(s))$ senkrecht, aufeinander ~~senkrecht aufeinander~~.

Betrachte dazu $F(s,t) = \exp(t w(s))$. Zu zeigen:

$g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$ für $0 < t < r$, s beliebig.

$$\frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial F}{\partial t}}_{=0}\right)$$

$$\underset{\text{Lemma A}}{=} g\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds} \underbrace{g\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)}_{= \text{const}} = 0$$

Also ist $g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)$ unabhängig von t. Aber

$F(0,s) = \exp(0) = p = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial s}(0,s) = 0$

$\Rightarrow \quad g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)(0,s) = 0$ für alle s

$\Rightarrow \quad g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)(t,s) = 0$ für alle s,t. $\square$

<u>Lemma G</u> Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p : \underbrace{B_\varepsilon(0)}_{\subseteq T_pM} \xrightarrow{\cong} U' \subseteq M$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $c : [0,1] \to U' - \{p\}$ stückweise glatt. Schreibe $c(t) = \exp_p(r(t) \cdot w(t))$ mit $0 < r(t) < \varepsilon$, $\|w(t)\| = 1 = \text{const}$ ("Kugelkoordinaten"). Dann gilt $L(c) \geq |r(0) - r(1)|$. Falls Gleichheit gilt, ist $w = \text{const.}$ und r ist monoton

<u>Bew.</u> Setze $F(s,t) = \exp_p(s \cdot w(t))$

$\leadsto c(t) = F(r(t), t) \Rightarrow \dot{c}(t) = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot r'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}$.

Nach Lemma B sind die beiden Summanden orthogonal.

Also $\|\dot{c}(t)\|^2 = \underbrace{\left\|\frac{\partial F}{\partial s}\right\|^2}_{= 1 = \text{const}} (r'(t))^2 + \left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2 \geq (r'(t))^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt \geq \int_0^1 |r'(t)| dt \geq \left|\int_0^1 r'(t) dt\right| = |r(1) - r(0)|.$$

Wenn Gleichheit gilt, so ist $\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\| = 0 \leadsto \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \leadsto w = \text{const}$

sowie $\int_0^1 |r'(t)| dt = \int_0^1 r'(t) dt$ oder $\int_0^1 |r'(t)| dt = -\int_0^1 r'(t) dt$

$\Rightarrow r' \geq 0$ oder $r' \leq 0$ auf $[0,1] \leadsto r$ monoton. $\square$

#

22. **Theorem** Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung W von p so, dass gilt: ist $c : [0,1] \to M$ eine Geodätische in M mit $c(0), c(1) \in W$ mit $L(c) < \varepsilon$ und ist $\tilde{c} \in \Omega(M, c(0), c(1))$ beliebig, so ist

$$L(c) \leq L(\tilde{c})$$

(also ist c Kürzeste). Ist $L(c) = L(\tilde{c})$, so gilt $c([0,1]) = \tilde{c}([0,1])$. Ist zusätzlich $\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = \text{const}$, so ist $c = \tilde{c}$.

Beweis Wir wählen W und $\varepsilon > 0$ wie in Satz § 3.20.

Sei c Geodätische mit $q = c(0) \in W$, $c(1) \in W$, $c : [0,1] \to M$ und mit $L(c) < \varepsilon$. Schreibe $c(1) = \exp_q(r \cdot w)$, $w \in T_q M$, $\|w\| = 1$, $0 \leq r < \varepsilon$. Für $r = 0$ ist nichts zu zeigen, also OE $0 < r < \varepsilon$. Für $0 < \delta < r < \varepsilon$ setze

$$s_1 = \inf\{t \geq 0 \mid \tilde{c}(t) \notin \exp_q(\bar{B}_r(0))\}$$
$$s_0 = \sup\{t \leq s_1 \mid \tilde{c}(t) \in \exp_q(\bar{B}_\delta(0))\}$$

Mit Lemma G folgt:

$$\int_{s_0}^{s_1} \|\dot{\tilde{c}}(t)\| \, dt \geq r - \delta \Rightarrow L(\tilde{c}) \geq r - \delta$$

$$\Rightarrow L(\tilde{c}) \geq r = L(c)$$

Wenn gilt $L(\tilde{c}) = r$, so ist für jedes $\delta > 0$

$\tilde{c}\big|_{[\delta,1]}$ Kürzeste von $\tilde{c}(\delta)$ und $\tilde{c}(1)$

$\Rightarrow \tilde{c}([\delta,1]) \subseteq M - q$. Mit Lemma C folgt

$\tilde{c}([\delta,1]) \subseteq c([0,1]) \Rightarrow \tilde{c}([0,1]) \subseteq c([0,1])$

Da $\tilde{c}(0) = c(0)$ und $\tilde{c}(1) = c(1)$ und da $c([0,1])$ zush ist, folgt $\tilde{c}([0,1]) = c([0,1])$.

Ist $\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = const$, so ist $\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = \|\dot{c}(t)\|$ für alle t und $\tilde{c}([0,t]) = c([0,t]) \Rightarrow \tilde{c}(t) = c(t)$ $\square$

<u>Korollar A</u> Ist (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und ist $c \in \Omega(M,p,q)$ Kürzeste mit $\|\dot{c}(t)\| \equiv const$, so ist c eine Geodäte.

<u>Beweis</u> c Kürzeste $\Rightarrow$ c lokal Kürzeste $\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$ c lokal Geodäte $\Rightarrow$ c Geodäte $\square$

<u>Korollar B</u> Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $K \subseteq M$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $p,q \in K$ mit $d(p,q) < \varepsilon$ eine eindeutige Geodäte $c: [0,1] \to M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$ und Länge $L(c) < \varepsilon$ existiert.

Beweis:

Jeder Punkt $p \in K$ hat eine Umgebung W_p wie in Satz §3.20 und ein $\varepsilon_p > 0$. Da K kompakt ist, gibt es $p_1, \dots, p_n \in K$ mit $K \subseteq W_{p_1} \cup \dots \cup W_{p_n}$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_n}\}$ $\square$

23. <u>Theorem</u> (Satz von Hopf-Rinow, I)

Sei (M, g) eine (rasch) geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu $p, q \in M$ beliebig eine Geodätische $c : [0,1] \to M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$ und $L(c) = d(p,q)$

<u>Beweis</u> Zu $p \in M$ wähle eine Umgebung W und $\varepsilon > 0$ wie in Satz §3.20. Sei $q \in M$ mit $d(p,q) = r > 0$ OE $r > \varepsilon$. Für $0 < \delta < \varepsilon$ sei

$$S = \exp_p \{ v \in T_pM \mid \|v\| = \delta \} \subseteq M.$$

Wähle $q' \in S$ so, dass $d(q', q)$ minimal ist (S ist kompakt!).

Schreibe $q' = \exp_p(\delta v)$ für ein $v \in T_pM$, $\|v\| = 1$

Beh: $\exp_p(r\cdot v) = q$. Wenn das gezeigt ist, folgt für $c(t) = \exp_p(tv)$, dass $c(r) = q$ und $L(c) = \int_0^r \|v\|\,dt = r$. Dazu zeigen wir: für $t \in [\delta, r]$ gilt

Beh$_t$: $d(c(t), q) = r - t$

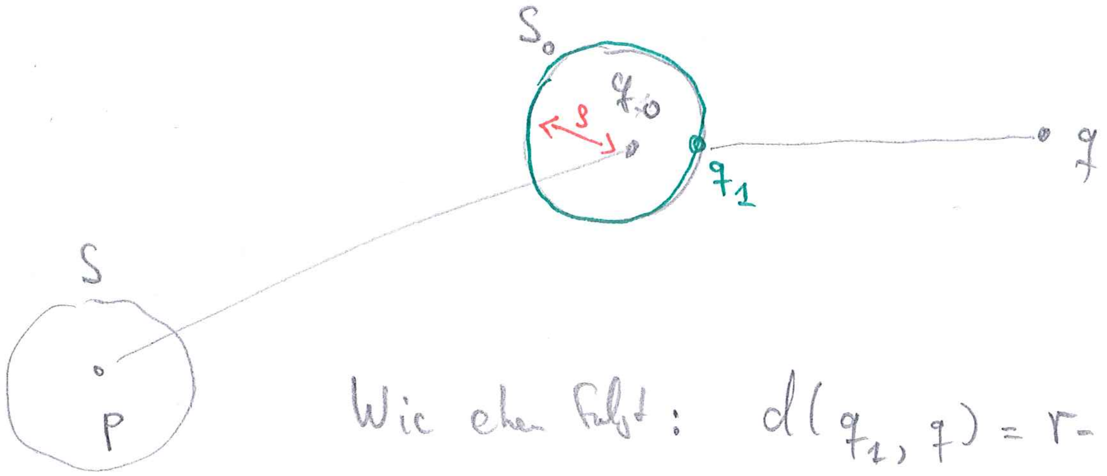
Zunächst einmal ist Beh$_\delta$ korrekt, denn: für jedes $\tilde{c} \in \Omega(M, p, q)$ gibt es $s \in [0,1]$ mit $\tilde{c}(s) \in S$ (weil $d(p,q) > \delta$ muss $q \notin \exp_p(B_\delta(0))$), also gilt

$$d(p,q) = \inf\{\underbrace{d(p,\tilde{q})}_{=\delta} + d(\tilde{q}, q) \mid \tilde{q} \in S\}$$
$$= \min\{\delta + d(\tilde{q}, q) \mid \tilde{q} \in S\}$$
$$= \delta + d(q', q).$$

Sei $t_0 = \sup\{t \in [\delta, r] \mid$ Beh$_t$ gilt$\}$.

Beh: $t_0 = r$. Denn angenommen, $t_0 < r$.

Sei $q_0 = c(t_0)$, sei $S_0 = \exp_{q_0}\{v \in T_{q_0}M \mid \|v\| = \varrho\}$ für ein hinreichend kleines $\varrho > 0$. Wähle $q_1 \in S_0$ mit minimalem Abstand zu q



Wie eben folgt: $d(q_1, q) = r - t_0 - \rho$

Nun gilt $d(p, q_1) + \underbrace{d(q_1, q)}_{r - t_0 - \rho} \geq d(p, q) = r$

$\Rightarrow d(p, q_1) \geq t_0 + \rho$. Aber es gibt $\tilde{c} \in \Omega(M, q, q_1)$ mit $L(\tilde{c}) = t_0 + \rho$: folge erst c von p bis q_0 und dann gehe radial von q_0 nach q_1. Wir können $\tilde{c}$ so wählen, dass $\|\dot{\tilde{c}}\| = \text{const}$ gilt. Es folgt: $\tilde{c}$ ist Geodäte und damit $\tilde{c}(1) = c(t_0 + \rho) = q_1$ $\lightning$

Also ist $t_0 = r$ und damit

$$d(c(r - \lambda), q) = \lambda \quad \text{für alle } 0 < \lambda < r.$$

Aber dann ist $d(c(r), q) = 0$ $\square$

24. <u>Def</u> Ein metrischer Raum (X,d) heißt <u>eigentlich</u> (engl: <u>proper</u>), wenn jede abg. beschränkte Teilmenge $A \subseteq X$ kompakt ist.
(Bolzano-Weierstraß: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ ist eigentlich).
Dann ist (X,d) vollständig. (ÜA: jede Cauchy-Folge ist beschränkt, also dann mit Häufungspunkt, also konvergent)

<u>Theorem</u> (Satz von Hopf-Rinow, II) Sei (M,g) eine zush. Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

(i) M ist geodätisch vollständig

(ii) es gibt ein $p \in M$ so, dass $\mathcal{O}_p = T_pM$ (d.h. $\exp_p$ ist auf ganz T_pM definiert)

(iii) (M,d) ist eigentlich

(iv) (M,d) ist metrisch vollständig.

<u>Bew.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $A \subseteq M$ abg. und beschränkt. Dann gibt es $r > 0$ so, dass $A \subseteq \{q \in M \mid d(p,q) \leq r\}$. Weiter ist $K = \exp_p(\overline{B}_r(0))$ kompakt. Nach § 3.23 gilt: $d(p,q) \leq r \Rightarrow q \in K$, also $A \subseteq K$ kompakt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ÜA, siehe oben. #

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iv): Angenommen, (M, g) ist nicht geodätisch vollständig. Dann gibt es $v \in TM$ mit $J_v \neq \mathbb{R}$. Ersetze v durch $s \cdot v$ für geeignetes s $\rightsquigarrow$ OE $J_v = (a, 1)$, $-\infty \leq a < 0$.

Sei $c = c_v : (a,1) \to M$ die zugehörige Geodäte.

Setze $t_k = 1 - 2^{-k}$ und $q_k = c(t_k) \Rightarrow d(q_k, q_{k+1}) \leq 2^{-(k+1)} \cdot \|v\|$

$\Rightarrow$ die $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ bilden eine Cauchy-Folge.

<u>Beh</u>: diese Cauchy-Folge ist nicht konvergent.

<u>Denn sonst</u>: angenommen, $q = \lim_k q_k \in M$. Wähle $\varepsilon > 0$ und Umgebung W von q wie in § 3.20, d.h. für alle $\tilde{q} \in W$, $w \in T_{\tilde{q}}M$ mit $\|w\| < \varepsilon$ ist $\exp_{\tilde{q}}(w)$ definiert. Für alle $k \gg 1$ ist $q_k \in W$. Wähle k so, dass $q_k \in W$ und $2^{-(k+1)} < \frac{\varepsilon}{\|v\|}$.

Betrachte die Kurve

$$\tilde{c}(t) = \begin{cases} c(t) & t \leq t_k \\ \exp_{q_k}\left((t - t_k)\,\dot{c}(q_k)\right) & 0 < t - t_k < \frac{\varepsilon}{\|v\|} \end{cases}$$

Für $0 < t_k < t_{k+1}$ ist $\tilde{c}(t) = c(t)$ (Eindeutigkeit der Geodäte, wobei $\dot{c}(t_k) = \dot{\tilde{c}}(t_k)$)

aber $\tilde{c}$ ist definiert auf $\left(a, t_k + \frac{\varepsilon}{\|v\|}\right)$

und $t_k + \frac{\varepsilon}{\|v\|} = 1 - 2^{-k} + \frac{\varepsilon}{\|v\|} > 1$ ↯

Also ist die Cauchy-Folge $(q_k)_{k=0}^{\infty}$ nicht konvergent.

$\square$