Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 6

Abgabe am **21.11.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Zusammenhänge verstehen (2 + 2 Punkte)

(a) Wir betrachten die eingebettete Sphäre $\mathbb{S}^2(r)$ vom Radius r für $r > 0$, d.h.

$$\mathbb{S}^2(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Diese lässt sich (bis auf den Meridan $\varphi = 0$) über die Karte

$$c : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2(r), \;\; (\theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

parametrisieren. Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$ *induziert eine Metrik* auf $\mathbb{S}^2(r)$, vgl. Beispiel nach Definition 20 in Kapitel 2 im Skript.

Zeigen Sie, dass diese gegeben ist durch

$$g = r^2 \, \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

Berechnen Sie außerdem die *Christoffel-Symbole.*

(b) Für $r > 0$ betrachten wir den Zylinder T_r mit Radius r, d.h.

$$T_r := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dieser hat (bis auf die Nahtstelle $\varphi = 0$) die Parametrisierung

$$c : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to T_r, \;\; (\varphi, z) \mapsto (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z).$$

Zeigen Sie, dass die von $\mathbb{R}^3$ *induzierte Metrik* durch

$$g = \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z + r^2 \, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$$

gegeben ist.

Berechnen Sie die *Christoffel-Symbole.*

Aufgabe 2: Levi-Civita-Zusammenhang auf eingebetteten Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ (4 Punkte)

Auf einer eingebetteten glatten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir Vektorfelder X und Y mit beliebigen Fortsetzungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und sei ∇^M der Levi-Civita-Zusammenhang auf M bezüglich der induzierten Metrik. Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M_X Y = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\top,$$

wobei $^\top$ die orthogonale Projektion auf TM bezeichnet.

Aufgabe 3: Paralleltransport $(1 + 3$ Punkte$)$

(a) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den Standardkoordinaten (x_1, x_2).

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

parallel auf $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Skizzieren Sie das Vektorfeld!

(b) Betrachten Sie $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik. Seien $\alpha \in [0, 2\pi)$, $p \in \mathbb{S}^2$ und $v \in T_p\mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$ beliebig.

Konstruieren Sie eine stückweise glatte geschlossene Kurve γ auf $\mathbb{S}^2$ (mit Start- und Endpunkt p), sodass der Winkel zwischen v und dem entlang γ parallel verschobenen Vektor $P_\gamma(v)$ gleich α ist.

Zeichnen Sie die Kurve γ für $\alpha = \pi/2$.

Aufgabe 4: Tangentialvektoren von $\mathbb{S}^2$ $(1 + 1 + 2$ Punkte$)$

Wir betrachten

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

mit dem *Nordpol* $N = (0, 0, 1)$ und dem *Südpol* $S = (0, 0, -1)$ und dem Atlas mit den Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2), wobei $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$,

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

und $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$,

$$\varphi_2 = -\varphi_1(-(x_1, x_2, x_3)).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Kartenwechsel gegeben ist durch

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(u_1, u_2) = \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}, \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \right).$$

(b) Sei $\xi \in T_p\mathbb{S}^2$ ein Tangentialvektor, der bezüglich (U_1, φ_1) als $\xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$ dargestellt wird. Wie wird dieser Vektor bezüglich der Karte (U_2, φ_2) dargestellt?

(c) Sei $p = \varphi_1^{-1}(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Geben Sie die Koordinaten des Vektors ξ aufgefasst als Element von $T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ an.