§4 Reelle Funktionen und Stetigkeit

1. Def Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir sagen, $(a_k)_{k\in I}$ ist eine Folge in A, wenn für alle $k\in I$ gilt $a_k \in A$.

Lemma Sei $r\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{k\in\mathbb{N}} q_k = r$.

Man sagt auch, $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis Behauptung Ist $s\in\mathbb{R}$, so gibt es $m\in\mathbb{Z}$ mit $s-1\le m\le s$.

Denn: es gibt $l\in\mathbb{Z}$ mit $l\le s-1$ (d.h. $-l \geq 1-s$) weil $\mathbb{R}$ archimedisch ist und $n\in\mathbb{N}$ mit $l+n \geq s-1$, also gibt es ein kleinstes $n\in\mathbb{N}$ mit $m = l+n \geq s-1$. Wäre $m > s$, so wäre $m-1 \geq s-1$ ↯, also $s-1\le m\le s$. □

Für $n\in\mathbb{N}$ wähle jetzt $k\in\mathbb{Z}$ mit $r\cdot n - 1 \le k \le r\cdot n$.

Für $n \geq 1$ folgt $r - \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq r$, setze

$q_n = \frac{k}{n}$ (und $q_0 = 0$). Es folgt $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} q_n = r$ $\square$

2. <u>Def</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, sei $r \in A$.
Eine Funktion (Abbildung) $F: A \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig im Punkt r</u> wenn Folgendes gilt.
Für <u>jede</u> Folge $(a_i)_{i \in I}$ in A mit $\lim\limits_{i \in I} a_i = r$
gilt $\lim\limits_{i \in I} F(a_i) = F(r)$.

<u>Kurz</u>: es gilt $\lim\limits_{i \in I} F(a_i) = F(\lim\limits_{i \in I} a_i)$
für jede Folge $(a_i)_{i \in I}$ in A mit $\lim\limits_{i \in I} a_i = r$.

Man schreibt dann auch: $\lim\limits_{x \to r} F(x) = F(r)$

Wenn F in <u>jedem</u> Punkt $r \in A$ stetig ist, dann heißt F <u>stetig</u> (auf der Menge A).

__Beispiele__ (a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist stetig (auf $\mathbb{R}$)

__Denn__: ist $r \in \mathbb{R}$, $(a_i)_{i \in I}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{i \in I} a_i = r$, so gilt $f(r) = c = f(a_i) \Rightarrow \lim\limits_{i \in I} f(a_i) = c$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^n$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. __Denn__: Sei $r \in \mathbb{R}$, sei $(a_i)_{i \in I}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{i \in I} a_i = r$. Nach §2.18 gilt dann $\lim\limits_{i \in I} a_i^n = r^n$, also $\lim\limits_{i \in I} f(a_i) = f(r)$.

(c) __Dirichlets Sprungfunktion__ Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Dann ist f in __keinem__ Punkt $r \in \mathbb{R}$ stetig.

__Denn__ (a) Falls $r \in \mathbb{Q}$ betrachte die Folge

$$a_n = r + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Es gilt $\lim\limits_{n} \left(r + \frac{\sqrt{2}}{n+1}\right) = r$ nach §2.18

(d) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist stetig in jedem Punkt $r \neq 0$

Im Punkt $r = 0$ ist die Funktion nicht stetig:

betrachte die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\lim_{n \in I} a_n = 0$ $f(0) = 0$ $f(a_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \in I} f(a_i) = 1$

(e) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist stetig in jedem Punkt $r \in \mathbb{R}$

Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist $r + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \notin \mathbb{Q}$, also $f(a_n) = 0$
$r \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} f(a_n) = 0$ aber $f(r) = 1$.

(b) Falls $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ gibt es nach §4.1 eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} q_n = r$, also

$f(q_n) = 1$ für alle n $\Rightarrow \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} f(q_n) = 1 \neq f(r) = 0$ $\square$

3. Beobachtung: Sei A irgendeine nichtleere Menge, sei $\mathbb{R}^A$ die Menge aller Abbildungen $f: A \to \mathbb{R}$.

Dann ist $\mathbb{R}^A$ ein reeller Vektorraum, wenn wir für $x \in A$, $s \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathbb{R}^A$ definieren

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(s \cdot f)(x) = s \cdot f(x)$$

und ein Ring mit der Multiplikation

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Das Nullelement ist die Nullfunktion $f(x) = 0$, das Einselement ist die "Einsfunktion"

$f(x) = 1$

4. **Def** Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge,
sei $C(A,\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{R}^A \mid f \text{ ist stetig auf } A \}$
die Menge aller stetigen Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$.

Satz $C(A,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^A$ ist ein (Unter) Vektorraum und ein Ring. Das heißt: Summen, Produkte und Vielfache von stetigen Funktionen sind wieder stetig.

Beweis Sei $f, g \in C(A,\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.
Sei $r \in A$ beliebig, sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge in A mit $\lim_{i \in I} a_i = r$. Nach § 2.18 gilt nun

$$\lim_{i \in I} (f(a_i) + g(a_i)) = \lim_{i \in I} f(a_i) + \lim_{i \in I} g(a_i) = f(r) + g(r)$$

$$\lim_{i \in I} (f(a_i) \cdot g(a_i)) = \left(\lim_{i \in I} f(a_i)\right)\left(\lim_{i \in I} g(a_i)\right) = f(r) \cdot g(r)$$

$$\lim_{i \in I} (s \cdot f(a_i)) = s \cdot \lim_{i \in I} f(a_i) = s \cdot f(r)$$

$\square$

5. Beispiel (a) Polynomfunktionen.

Eine Polynomfunktion ist eine Abbildung der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Nach Beispiel §4.2 (b) und §4.4 ist p stetig (auf jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$).

(b) Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ ist mit $0 \notin A$, so ist $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf A.

Das folgt mit §2.18: ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge in A mit $\lim_{i \in I} a_i = r \in A$, so ist (wegen $a_i \neq 0$, $r \neq 0$) $\lim_{i \in I} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{r}$.

(c) Ist $f: A \to \mathbb{R}$ stetig auf A und ist $B \subseteq A$ eine (nicht leere) Teilmenge, dann ist f stetig auf B (jede Folge in B ist auch eine Folge in A).

6. Satz (Verknüpfung) Verkettungen stetiger Abbildungen sind stetig. Das heißt: ist $f: A \to \mathbb{R}$ stetig und $g: B \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(B) \subseteq A$,

$g: B \to A$

dann ist auch

$$f \circ g : B \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x))$$

stetig.

Beweis Sei $r \in B$ und sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Folge in B mit $\lim\limits_{i \in I} b_i = r$. Dann ist $(g(b_i))_{i \in I}$ eine Folge in A mit $\lim\limits_{i \in I} g(b_i) = g(r)$, also gilt

$$\lim_{i \in I} f(g(b_i)) = f(g(r))$$ □

Beachte den Unterschied zwischen

Verkettung $(f \circ g)(x) = f(g(x))$!

Produkt $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

7. Definition Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Wir definieren die Intervalle

$[a,b] = \{ t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b \}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) = \{ t \in \mathbb{R} \mid a < t < b \}$ offenes Intervall

$=]a,b[$

9. Satz (Der Zwischenwertsatz)

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (d.h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$) ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

"Jeder Zwischenwert wird angenommen."

Beweis Für $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ ist das klar. Wir betrachten den Fall $f(a) < y < f(b)$, der Fall $f(b) < y < f(a)$ geht analog.

Sei $M = \{ z \in [a,b] \mid f(z) \leq y \}$. Dann ist $a \in M$ und b ist obere Schranke von M, setze $x = \sup(M)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gibt es also ein $z_n \in M$ mit $x - \frac{1}{n} \leq z_n \leq x$, und $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} z_n = x$ (setze $z_0 = a$).

Es folgt $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = f(x)$.

<u>Beh</u> Es gilt $f(x) = y$.

Wäre $f(x) > y$, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(z_n) > y$ ↯ denn $z_n \in M$. Es folgt $f(x) \leq y$.

Da $x \neq b$ ($f(b) > y$) gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $x + \frac{1}{m} < b$.

Für alle $n \geq m$ folgt $x + \frac{1}{n} \in [a,b]$, also

$\lim\limits_{n \geq m} f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$. Da $x + \frac{1}{n} \notin M$, folgt

$f(x + \frac{1}{n}) > y$ und folglich $\lim\limits_{n \geq m} f(x + \frac{1}{n}) \geq y$

Insgesamt $y \leq f(x) \leq y \Rightarrow f(x) = y$ □

⌜ Wir haben dabei folgendes benutzt: ist $(c_j)_{j \in I}$ eine konvergente Folge und gilt $c_j \leq t$ für alle (oder fast alle) $j \in I$, so ist $\lim\limits_{j \in I} c_j \leq t$.

<u>Denn</u> Wäre $r = \lim\limits_{j \in I} c_j > t$, so gäbe es $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $j \geq m$ gilt $|c_j - t| \leq \frac{r-t}{2}$

$\Rightarrow c_j \geq \frac{r+t}{2} > t$ ↯ ⌟

\#

10. <u>Satz</u> Sei $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$,

sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (d.h. für $s < t$ gilt stets $f(s) < f(t)$) und stetig.

Dann hat f eine stetige Umkehrfunktion

$$g : \underbrace{[f(a), f(b)]}_{= B} \to [a,b] \quad \text{d.h.}$$

$$f \circ g = id_B \quad \text{und} \quad g \circ f = id_A$$

$$f(g(y)) = y \qquad g(f(x)) = x$$

<u>Beweis</u> Da f streng monoton ist, ist f <u>injektiv</u>: für $s \neq t$ folgt $f(s) \neq f(t)$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jedes y zwischen $f(a) \leq y \leq f(b)$ ein genau $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$. Definiere $g(y) = x$. Für $t \neq x$ ist $f(t) \neq y$ (siehe oben), also ist x durch y eindeutig bestimmt. Es folgt

$$g(f(x)) = g(y) = x$$

$$f(g(y)) = f(x) = y$$

Bleibt zu zeigen: g ist stetig.

Sei $(y_i)_{i \in I}$ eine Folge in B mit Grenzwert $\lim_{i \in I} y_i = y$. Sei $x = g(y)$ sowie $x_i = g(y_i)$.

Zu zeigen ist: $\lim_{i \in I} x_i = x$. Angenommen, das

---

wäre falsch. Denn gäbe es $\varepsilon > 0$ so, dass

$L = \{ i \in I \mid |x_i - x| > \varepsilon \}$ unendlich ist.

Nach Bolzano-Weierstraß hat die beschränkte Folge $(x_i)_{i \in L}$ eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt $K \subseteq L$ unendlich mit $\lim_{k \in K} x_k = r$.

Da F stetig ist, folgt $\lim_{k \in K} \underbrace{F(x_k)}_{= y_k} = F(r)$.

Da $\lim_{k \in K} y_k = y$ gilt, folgt $F(r) = y$

$\Rightarrow$ $r = x$, denn F ist injektiv. ↯

denn $|x_k - x| \geq \varepsilon$ für alle $k \in K$. $\square$

Ein entsprechender Satz gilt, wenn F stetig und streng monoton fallend ist.

11. Anwendung: Die allgemeine Wurzelfunktion

Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Die Abbildung $f : [0, r] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

ist streng monoton und stetig, denn für $t > 0$

gilt $(x+t)^n = x^n + \underbrace{n \cdot x^{n-1} t + \dots + t^n}_{>0} > x^n$

Nach Satz § 4.10 gibt es eine Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{\ } : [0, r^n] \longrightarrow [0, r]$$
$$y \longmapsto \sqrt[n]{y}$$

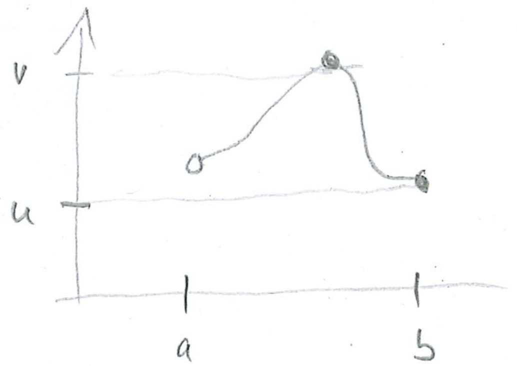
die stetig ist.

Das gilt für <u>jedes</u> $r > 0$. Daher ist die n-te Wurzel $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig

$(\mathbb{R}_{\geq 0} = \{ t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \})$, denn: ist $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig und ist $(a_n)_{n \in I}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim\limits_{n \in I} a_n = s$, so ist $(a_n)_{n \in I}$ beschränkt (vgl. § 2.15), also Folge in $[0, r^n]$ für ein $r > 0$ und damit gilt $\lim\limits_{n \in I} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{s}$ □

12. Theorem (Satz von Weierstraß)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $B = f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ ein abg. Intervall, $f([a,b]) = [u,v]$ für $u,v \in \mathbb{R}$. Insbesondere hat f auf der Menge $[a,b]$ ein Minimum und ein Maximum, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = u = \min(B)$ und $f(x_2) = v = \max(B)$.



Beweis in 4 Schritten.

(1) Beh. B hat eine obere Schranke.

Wäre das falsch, gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $z_k \in [a,b]$ mit $f(z_k) \geq k$.

Nach Bolzano-Weierstraß §2.21 hat die Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(z_k)_{k \in K}$, $K \subseteq \mathbb{N}$ unendlich.

$\lim\limits_{k\in K} z_k = z$, $a \le z \le b$ (weil $a \le z_k \le b$).

Es folgt $\lim\limits_{k\in K} \underbrace{f(z_k)}_{\ge k} = f(z)$. Für alle $k \ge f(z)+1$

ist also $f(z_k) \ge f(z)+1$, ein Widerspruch ↯

$|f(z_k) - f(z)| \ge 1$

(2) <u>Beh</u>: B hat eine untere Schranke

Genauso wie (1).

Wir setzen $u = \inf(B)$ und $v = \sup(B)$.

(3) <u>Beh</u> Es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = u$
$f(x_2) = v$

<u>Denn</u> Es gibt eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit

$\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} f(z_k) = u$ (wähle z_k so, dass $f(z_k) \le u + \frac{1}{k}$)

Wieder mit Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_k)_{k\in K}$, die konvergiert, $\lim\limits_{k\in K} z_k = x_1$.

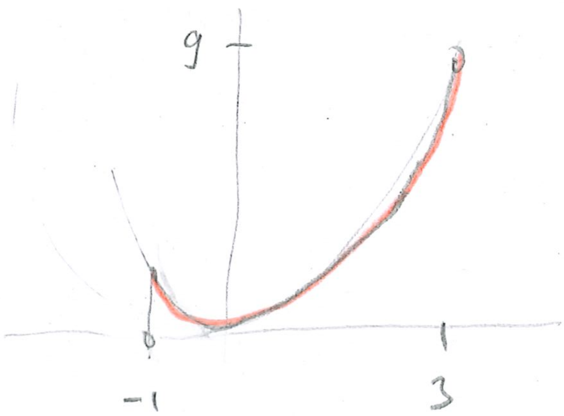
Es folgt $f(x_1) = u$, da f stetig ist.

Genauso gibt es $x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_2) = v$.

(4) Es gilt $f([a,b]) = [u,v]$.

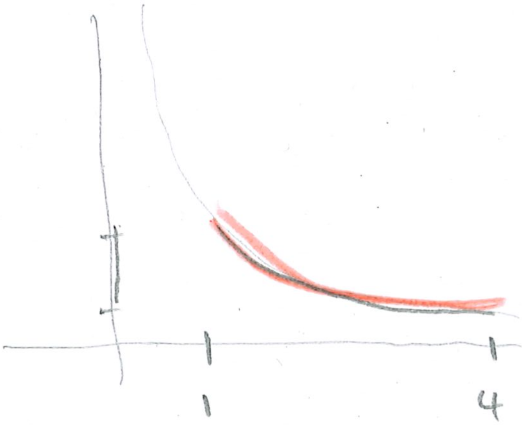
Denn $f([a,b]) \subseteq [u,v]$. Nach dem Zwischenwertsatz §4.9. gibt es zu jedem $y \in [u,v]$ ein x zwischen x_1 und x_2 mit $f(x) = y$. $\square$

13. Beispiele (a) $f(x) = x^2$, auf $[-1,3]$



$f([-1,3]) = [0,9]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[1,4]$



$f([1,4]) = [\frac{1}{4}, 1]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $A = [1,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x\}$

$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \le 1\}$ kein abg. Intervall – aber A ist auch kein abg. Intervall

#

Jetzt betrachten wir Folgen von Funktionen.

14. __Def__ Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ unendliche Indexmenge.

Eine __Folge von Funktionen__ auf einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$I \to \mathbb{R}^A$$

d.h. jedem $i \in I$ wird eine Funktion $f_i : A \to \mathbb{R}$ zugeordnet. Schreibe $(f_i)_{i \in I}$.

__Bsp__ $A = [0,1]$, $f_i(x) = x^i$ $i \in \mathbb{N}$

also $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, \ldots$

__Def__ Eine Folge von Funktionen $(f_i)_{i \in I}$ __konvergiert punktweise__ gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$

wenn für jedes $r \in A$ gilt

$$\lim_{i \in I} f_i(r) = f(x).$$

Sie konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein m so, dass für alle $r \in A$ und alle $k \geq m$ gilt

$$|f_k(r) - f(r)| \leq \varepsilon$$

Klar: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt immer punktweise Konvergenz. Wie sieht es mit der Umkehrung aus?

Bsp $A = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für $r = 1$ gilt $f_n(1) = 1^n = 1$ für alle n.

Für $0 \leq r < 1$ gilt $\lim_{n \in \mathbb{N}} r^n = 0$, vgl. § 3.4

Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen die unstetige

Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{wenn } 0 \leq x < 1. \end{cases}$

Die Konvergenz ist <u>nicht</u> gleichmäßig, denn zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gibt es ein $x_n \in [0,1]$ mit $f(x_n) = \frac{1}{2}$ (nämlich $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$), also

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$.

15. <u>Satz</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer, sei $(f_k)_{k \in I}$ eine Folge stetiger Funktionen in $C(A, \mathbb{R})$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in A^{\mathbb{R}}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

<u>Beweis</u> Sei $(a_\ell)_{\ell \in L}$ eine Folge in A mit $\lim\limits_{\ell \in L} a_\ell = a \in A$. Zu zeigen ist $\lim\limits_{\ell \in L} f(a_\ell) = f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq m$ und alle $x \in A$ gilt $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Da f_m stetig ist gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$|f_m(a_\ell) - f_m(a)| \leq \varepsilon$ für alle $\ell \geq n$.

Insgesamt folgt für $l \geq n$, dass

$$|f(a_l)-f(a)| = |f(a_l)-f_m(a_l)| + |f_m(a_l)-f_m(a)| + |f_m(a)-f(a)|$$

$$\leq 3\cdot\varepsilon, \text{ also } \lim_{l\in L} f(a_l) = f(a). \quad \square$$

16. <u>Def</u> Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>Potenzreihe</u> und man schreibt dafür $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot x^k$

Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

Setze $L = \begin{cases} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ beschränkt ist.} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

$$R = \begin{cases} 0 & \text{falls } L=\infty \\ \frac{1}{L} & \text{falls } L\neq\infty, L\neq 0 \\ \infty & \text{falls } L=0 \end{cases}$$

<u>Satz</u> Ist $|x| < R$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut.

Ist $|x| > R$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(Mit den Bezeichnungen von oben.)

<u>Beweis</u> Angenommen, $|x| < R$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$$ und damit

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Folglich gibt es $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$, so dass

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach dem Wurzelkriterium §3.13 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut.

Ist $R < |x|$, so ist $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ die Reihe ist divergent nach §3.6.

$\square$

Man nennt die Zahl R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

17. Theorem Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$. Sei $0 \le r < R$, sei $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Dann konvergiert die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[-r, r]$. Insbesondere ist die Abbildung $x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ stetig auf dem offenen Intervall $(-R, R)$.

Beweis Nach §4.16 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot r^k$.

Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot r^k \le \varepsilon$ gilt.

Für $|x| \le r$ ist $|x|^k \le r^k$, also

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k \cdot x^k| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot r^k \le \varepsilon .$$

Für $l \geq n$ folgt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - P_l(x) \right| = \left| \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon$$

d.h. $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-r,r]$ gleichmäßig gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Damit ist die Funktion auch stetig auf $[-r,r]$ (nach § 4.15). #

Sei jetzt $x \in (-R,R)$ beliebig, sei $(x_j)_{j \in I}$ ein Folge in $(-R,R)$ mit $\lim_{j \in I} x_j = x$.

Dann gibt es $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < R$ so, dass für alle $j \in I$ gilt

$x_j \in [-r,r]$ (weil für fast alle $j \in I$ gilt $R - |x_j| \geq \frac{1}{2}(R - |x|)$). Es folgt $\lim_{j \in I} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_j^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

□

18. __Beispiel__ (a) Die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$,

vgl. § 3.15. Also ist der Konvergenzradius $R = \infty$ und exp ist __stetig__ auf $\mathbb{R}$.

(b) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad L = \limsup_{n} \sqrt[n]{1} = 1$$

$\Rightarrow R = 1$ Konvergenzradius

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$

(c) Die trigonometrischen Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man, dass beide Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren

Also ist $R = \infty$ und beide Funktionen sind stetig $\boxed{\to \text{ÜA}}$

Weitere Eigenschaften von Sinus und Kosinus:

$$\left.\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(-x) &= \cos(x) \end{aligned}\right\} \text{ klar nach Definition}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

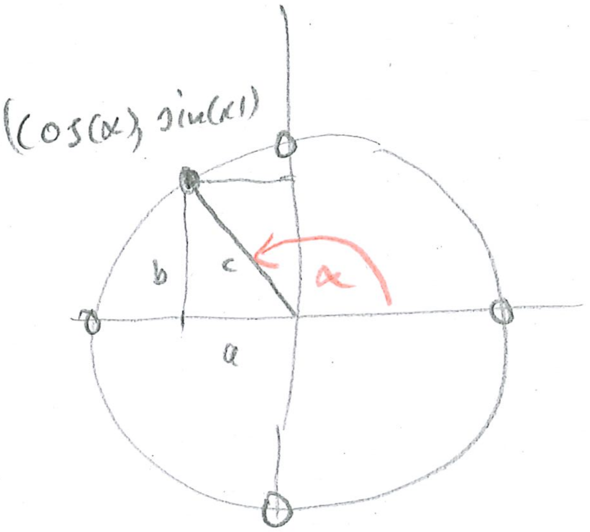
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

mit Cauchys Produktsatz

Es folgt wegen $\cos(0) = 1$, dass

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) \\ &= \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

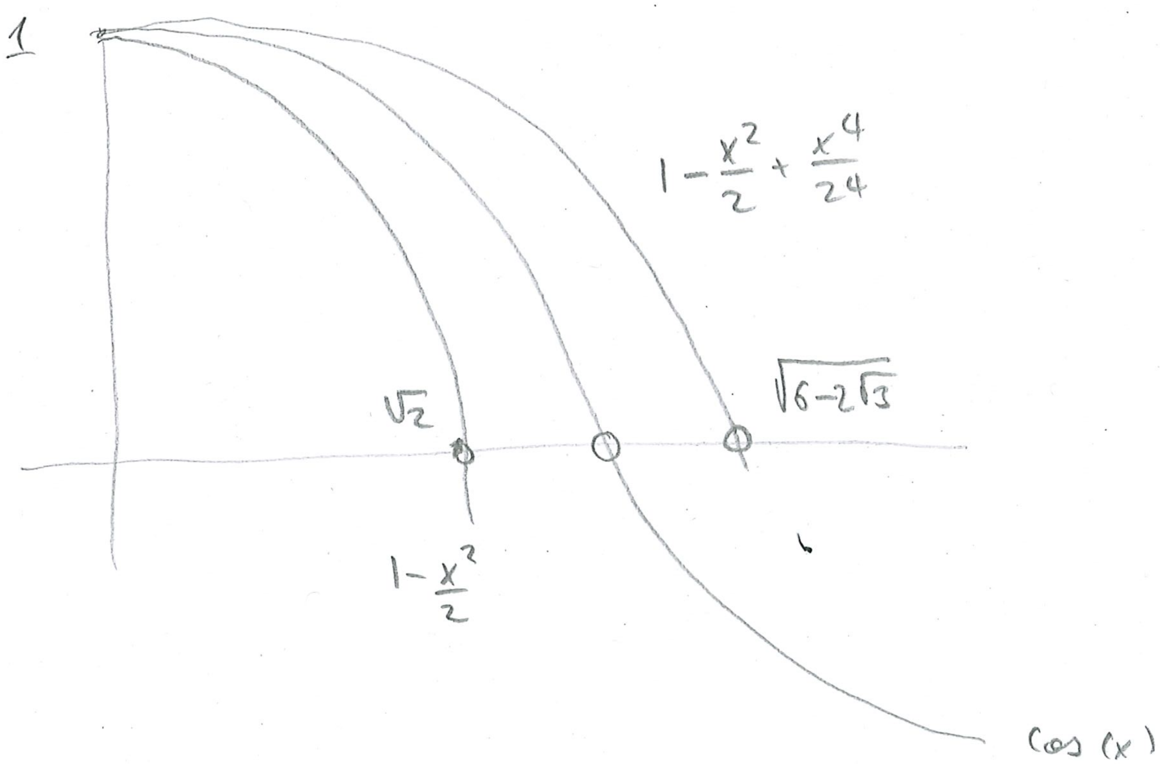
d.h. der Punkt mit Koordinaten $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ in $\mathbb{R}^2$ liegt für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis



$a^2 + b^2 = c^2$ Pythagoras

Man rechnet nach, dass für $0 \le x \le 3$ gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$



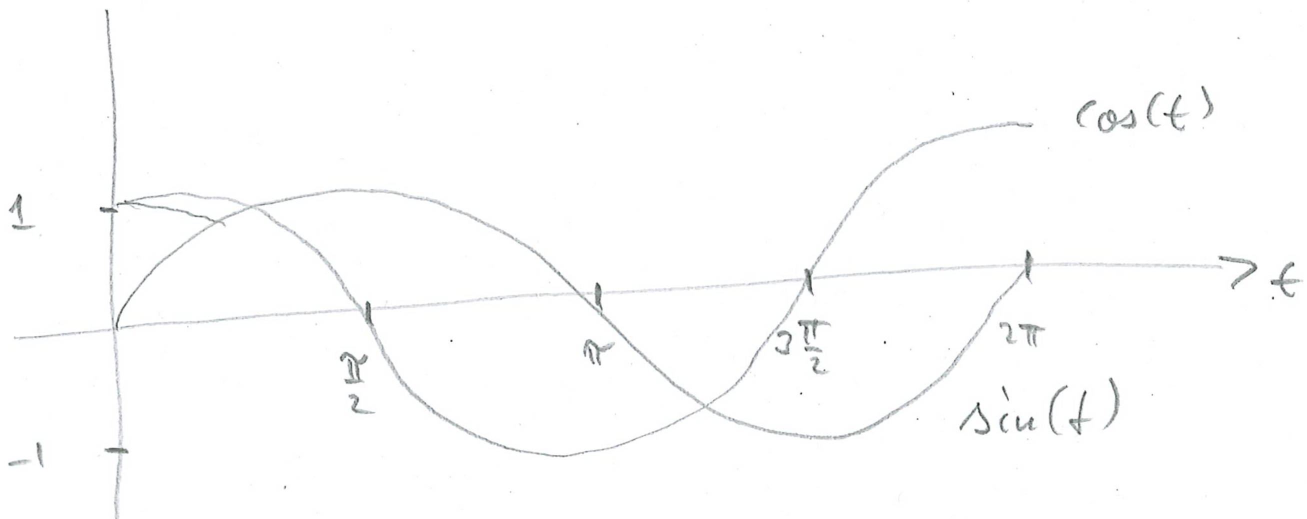
Also hat cos im Intervall $[\sqrt{2}, \sqrt{6-2\sqrt{3}}]$ eine Nullstelle (nach dem Zwischenwertsatz)

Die kleinste positive Zahl $t>0$ mit $\cos(t)=0$ ist per Definition $t=\frac{\pi}{2}$, also $\pi = 2\cdot t$. Damit $\cos(\frac{\pi}{2})=0$, $\cos(t)>0$ für $0 \le t < \frac{\pi}{2}$, $\pi = 3.14159\ldots$

Ähnlich zeigt man: $\sin(t) \geq 0$ für $0 \le t \le 3$.

Es folgt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, mit den Additionstheoremen

$$\sin(t+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(t)$$
$$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$$
$$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$$



Für Details siehe Forster, Analysis 1 §14
Walter, Analysis 1 §7.16