§2 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory und das Lebesgue-Maß

C. Carathéodory : griech. Mathematiker, 1873–1950

H. Lebesgue : franz. Mathematiker, 1875–1941

1. __Def__ Sei Ω eine Menge. Ein __äußeres Maß__ ist eine Abbildung $\mu^*: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit

(AM1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(AM2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(AM3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$

2. __Lemma__ Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Prämaß μ_0. Setze für $X \subseteq \Omega$ beliebig

$$\mu^*(X) = \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathcal{A} \text{ für alle } n \text{ und } X \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\}$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu^*(A) = \mu_0(A)$.

Beweis Sei $A \in \mathcal{A}$, dann ist $\mu^*(A) = \mu_0(A)$.

Denn: $A_0 = A$, $A_k = \emptyset$ für $k \geq 1 \rightsquigarrow A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$,

$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(A_k) = \mu_0(A) \rightsquigarrow \mu^*(A) \leq \mu_0(A)$.

Ist $B_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, so

betrachte $C_0 = B_0$, $C_1 = B_1 - B_0, \ldots, C_k = B_k - (B_0 \cup \ldots \cup B_{k-1}) \in \mathcal{A}$

$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A \cap C_k) \Rightarrow \mu_0(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(A \cap C_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(C_k)$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(B_k) \Rightarrow \mu_0(A) \leq \mu^*(A)$. $\square$

Insbesondere ist $\mu^*(\emptyset) = 0$ und (AM1) ist wahr.

Wenn $A \subseteq B \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ mit $B_k \in \mathcal{A}$,

dann $A \subseteq \sum_{k=0}^{\infty} B_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, also gilt (AM2).

Zu (AM3). Sei $A_k \subseteq \Omega$ für alle k, zu zeigen ist

$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$. Das ist sicher richtig,

falls $\mu^*(A_k) = \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Also OE

$\mu^*(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, wähle

$A_{kj} \in \mathcal{A}$ so, dass $A_k = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_{k,j}$ mit

$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_0(A_{kj}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-k}$

Dann gilt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k,j=0}^{\infty} A_{kj}$ und

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mu_0(A_{kj}) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\mu^*(A_k)+\frac{\varepsilon}{2}2^{-k}\Big)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon .$$ Es folgt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) \qquad \square$$

3. <u>Lemma</u> Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Prämaß μ_0, sei μ^* das äußere Maß aus Lemma §2.2.

Sei $\mathcal{A}^* = \{A \subseteq \Omega \mid$ für alle $E \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E)\}$

Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra. Die Mengen in $\mathcal{A}^*$ heißen <u>μ^*-messbar</u>.

<u>Beweis</u> Es gilt $\Omega \in \mathcal{A}^*$. Für $A \in \mathcal{A}^*$ und jedes $E \subseteq \Omega$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c\cap E),$$ also

folgt $A^c \in \mathcal{A}^*$. <u>Beh:</u> $\mathcal{A}^*$ ist eine Algebra.

Sei $A, B \in \mathcal{A}^*$, dann gilt $A \cup B \in \mathcal{A}^*$.

Denn: $\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c\cap E) = \mu^*(E)$

$\mu^*(B\cap E) + \mu^*(B^c\cap E) = \mu^*(E)$

$$\mu^*(B \cap A \cap E) + \mu^*(B^c \cap A \cap E) = \mu^*(A \cap E)$$

$$\mu^*(B \cap A^c \cap E) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap E) = \mu^*(A^c \cap E)$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(B \cap A \cap E) + \mu^*(B^c \cap A \cap E) + \mu^*(B \cap A^c \cap E) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap E) \quad ① \rightarrow$$

Für $F \subseteq \Omega$ und $E = F \cap (A \cup B)$ erhalten wir daraus

$$\mu^*(F \cap (A \cup B)) = \mu^*(B \cap A \cap F) + \mu^*(B^c \cap A \cap F) + \mu^*(B \cap A^c \cap F) + \mu^*(\emptyset) \quad ② \rightarrow$$

Es folgt mit ① und ②, dass

$$\mu^*(F) = \mu^*((A \cup B) \cap F) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap F)$$

$$= \mu^*((A \cup B) \cap F) + \mu^*((A \cup B)^c \cap F)$$

also $A \cup B \in \mathcal{A}^*$. $\square$

<u>Beh</u> <u>$\mathcal{A}^*$ ist ein Dynkin-System.</u>

Denn: $A \in \mathcal{A}^* \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^*$ (o.o.)

$E \subseteq \Omega$, $A, B \in \mathcal{A}^*$ disjunkt $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\mu^*((A \cup B) \cap E)$

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(B \cap E) \quad ③$$

Sei nun $A_k \in \mathcal{A}^*$ für alle k, $A_k \cap A_j = \emptyset$ für $j \neq k$.

Zu zeigen: $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

#

zu ②:

$$B \cap A \cap (F \cap (A \cup B)) = B \cap A \cap F$$

$$B^c \cap A \cap (F \cap (A \cup B)) = B^c \cap A \cap F$$

$$B \cap A^c \cap (F \cap (A \cup B)) = B \cap A^c \cap F$$

$$B^c \cap A^c \cap (F \cap (A \cup B)) = \emptyset$$

zu ③:

$$\begin{aligned} \mu^*(F) &\overset{①}{=} \mu^*(B \cap A \cap F) + \mu^*(B^c \cap A \cap F) \\ &\quad + \mu^*(B \cap A^c \cap F) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap F) \\ &\overset{②}{=} \mu^*((A \cup B) \cap F) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap F) \\ &= \mu^*((A \cup B) \cap F) + \mu^*((A \cup B)^c \cap F) \end{aligned}$$

Für $E \subseteq \Omega$ gilt nach (3) mit Induktion nach m

$$\mu^*\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{m}} A_k \cap E\Big) = \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A_k \cap E), \text{ also}$$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{m}} A_k \cap E\Big) + \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{k=0}^{m}} A_k\big)^c \cap E\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{k=0}^{m}} A_k\big)^c \cap E\Big) \\
&\geq \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} A_k\big)^c \cap E\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(E) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} A_k\big)^c \cap E\Big) \\
&\geq \mu^*\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} A_k \cap E\Big) + \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} A_k\big)^c \cap E\Big) \\
&\geq \mu^*(E) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Es folgt $\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} A_k \in \mathcal{A}^*$, damit ist $\mathcal{A}^*$ ein Dynkin-System. Da $\mathcal{A}^*$ auch ein Algebra ist, ist $\mathcal{A}^*$ ein σ-Algebra, vgl. § 1.9.

$\square$

4. **Lemma** Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3 gilt: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ und μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Beweis Sei $A_k \in \mathcal{A}^*$ für alle $k \in \mathbb{N}$, mit $A_k \cap A_j = \emptyset$ für $j \neq k$. Zu zeigen ist $\mu^*(\bigcup_{k=0}^\infty A_k) = \sum_{k=0}^\infty \mu^*(A_k)$.

Für $E \subseteq \Omega$ gilt nach ④ aus Lemma 3

$$\mu^*(E) = \sum_{k=0}^\infty \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=0}^\infty A_k\right)^c \cap E\right)$$

Speziell für $E = \bigcup_{k=0}^\infty A_k$ folgt also

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^\infty A_k\right) = \sum_{k=0}^\infty \mu^*(A_k). \qquad \square$$

Sei nun $A \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist $A \in \mathcal{A}^*$. Sei $E \subseteq \Omega$ beliebig. **Beh**: $\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$.

OE $\mu^*(E) < \infty$ (sonst ist das klar). Also gibt es zu $\varepsilon > 0$ $B_k \in \mathcal{A}$ mit $E \subseteq \bigcup_{k=0}^\infty B_k$ und $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{k=0}^\infty \mu^*(B_k)$

$$\overset{*}{=} \sum_{k=0}^\infty \left(\mu^*(B_k \cap A) + \mu^*(B_k \cap A^c)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \mu^*(B_k \cap A) + \sum_{k=0}^\infty \mu^*(B_k \cap A^c)$$

$$\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

* weil $\mu^* = \mu_0$ auf $\mathcal{A}$ ein Prämaß ist

Es folgt $\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \geq \mu^*(E)$ (weil μ^* ein äußeres Maß ist). Also gilt $A \in \mathcal{A}^*$ $\square$

5. __Theorem__ (__Caratheodorys Fortsetzungssatz__)

Sei μ_0 ein Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A}$. Dann gibt es ein Maß μ auf $\langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$, das μ_0 fortsetzt, d.h. $\mu(A) = \mu_0(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

__Beweis__ Nach § 2.2 - 2.4 ist μ^* ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ der μ^*-messbaren Mengen, und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$. Es folgt $\langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} \subseteq \mathcal{A}^*$. Für $A \in \mathcal{A}$ ist $\mu^*(A) = \mu_0(A)$. Für $B \in \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ setze $\mu(B) = \mu^*(B)$, dann ist μ ein Maß auf $\langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$. $\square$

Nun stellt sich die Frage, ob die Fortsetzung μ von μ_0 __eindeutig__ bestimmt ist.

6. Def Ein Inhalt μ heißt σ-endlich, wenn es $A_k \in \mathcal{A}$ gibt mit $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ und mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle k. ⊛

Bsp Das Lebesgue-Prämaß ist σ-endlich: setze $A_k = [-k,k]^n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(A_k) = (2k)^n < \infty$
$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

7. Satz Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, sei $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.
Seien μ_0, ν_0 Prämaße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu_0 \leq \nu_0$, seien μ, ν Fortsetzung von μ_0 und ν_0 zu Maßen auf $\mathcal{A}_1$.
Wenn ν σ-endlich ist, dann gilt $\mu \leq \nu$.

Beweis Wir nehmen zuerst an, dass $\nu(\Omega) < \infty$.
Setze $\tau_0 = \nu_0 - \mu_0$, dann ist auch τ_0 ein Prämaß auf $\mathcal{A}$. Sei τ eine Fortsetzung von τ_0 auf $\mathcal{A}_1$ (nach Satz §2.5). Betrachte

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{A}_1 \mid \underbrace{\tau(D)}_{<\infty} + \underbrace{\mu(D)}_{<\infty} = \underbrace{\nu(D)}_{<\infty\ (!)} \}$$

Klar: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. Beh $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System.

⊛ Ein Inhalt heißt endlich, wenn $\mu(\Omega) < \infty$.
Endlich $\Rightarrow$ σ-endlich.

Denn: $\Omega \in \mathcal{D}$ (weil $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$). Ist $D \in \mathcal{D}$, so ist $\tau(D) < \infty$ (s.o.) und $\tau(D^c) + \tau(D) = \tau(\Omega) < \infty$

$$\leadsto \tau(D^c) = \tau(\Omega) - \tau(D) = \nu(\Omega) - \mu(\Omega) - \nu(D) + \mu(D)$$
$$= \nu(D^c) - \mu(D^c)$$

$\Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$.

Sei jetzt $D_k \in \mathcal{D}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ mit $D_k \cap D_j = \emptyset$ für $j \neq k$. Beh: $\dot{\bigcup}_{k=0}^{\infty} D_k \in \mathcal{D}$.

$$\tau\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} D_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau(D_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu(D_k) - \nu(D_k))$$

$$= \nu\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} D_k\Big) - \mu\Big(\dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} D_k\Big) \qquad \square$$

Also ist $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1$ ein Dynkin-System, damit

$$\mathcal{D} \supseteq \langle \mathcal{A} \rangle_{\text{Dyn}} \underset{\uparrow}{=} \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{A}_1, \text{ also } \mathcal{D} = \mathcal{A}_1.$$

§1.10 Sierpinski-Dynkin

Es folgt $\mu \leq \nu$.

Betrachte jetzt den allgemeinen Fall. Schreibe

$$\Omega = \dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} B_k \quad \text{mit } B_k \in \mathcal{A},\ \nu(B_k) < \infty.$$

OE $B_k \cap B_j = \emptyset$ für $j \neq k$ (der übliche Trick, $B_k = A_k - (A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}) \ldots$). Setze

$$\left.\begin{array}{l} \nu_k(A) = \nu(A \cap B_k) \\ \mu_k(A) = \mu(A \cap B_k) \end{array}\right\}$$ Maße auf Ω und nach obigem gilt $\nu_k \geq \mu_k$, weil

$\nu_k(\Omega) < \infty$.

Für $A \in \mathcal{A}_1$ ist $\nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k(A)$

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(A)$$

es folgt $\mu \leq \nu$. $\square$

8. Korollar Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, sei μ_0 ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$. Dann gibt es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$, das μ_0 fortsetzt.

Denn Wenn μ, μ' zwei Fortsetzungen sind, so folgt

$$\mu \leq \mu' \leq \mu. \quad \square$$

Wir betrachten noch folgende Variante von Satz §0.7.

9. Satz (Identitätssatz) Sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil (also: $A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Z}$), sei $\mathcal{A} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.

Angenommen, μ, ν sind Maße auf $\mathcal{A}$, mit $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{Z}$. Falls es $E_0 \subseteq E_1 \subseteq$ gibt mit $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = \Omega$, $E_k \in \mathcal{Z}$, $\mu(E_k) = \nu(E_k) < \infty$ für alle $k \geq 0$

so gilt $\mu = \nu$. #

Beweis Sei $E \in \mathcal{Z}$ mit $\mu(E) = \nu(E) < \infty$, sei

$$\mathcal{D}_E = \{ A \in \mathcal{A} \mid \mu(A \cap E) = \nu(A \cap E) \}.$$

Beh: $\mathcal{D}_E$ ist Dynkin-System.

Denn: $\Omega \in \mathcal{D}_E$. Ist $A_k \in \mathcal{D}_E$ für $k = 0, 1, \ldots$

$A_k \cap A_j = \emptyset$ für $k \neq j$, so gilt für $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$

$$\mu(A \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(A_k \cap E) = \nu(A \cap E),$$

also $A \in \mathcal{D}_E$.

Sei $A \in \mathcal{D}_E$, zeige $A^c \in \mathcal{D}_E$. Es gilt (mit $\mu(E) < \infty$!)

$$\mu(A^c \cap E) = \mu(E - A) = \mu(E) - \mu(E \cap A) = \nu(E) - \nu(E \cap A)$$
$$= \nu(E - A) = \nu(A^c \cap E), \text{ also } A^c \in \mathcal{D}_E.$$

Damit ist $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System.

Da $\mathcal{Z}$ $\cap$-stabil ist, gilt $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}_E$. Es folgt

$\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} \subseteq \mathcal{D}_E$ und $\langle \mathcal{Z} \rangle_{Dyn} = \langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ nach

Sierpinski-Dynkin. Also gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_E$.

Es folgt für alle $A \in \mathcal{A}$ $\mu(A \cap E_k) = \nu(A \cap E_k)$

Nun gilt $\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A \cap C_k)$ $\quad C_k = E_k - (E_0 \cup \ldots \cup E_{k-1})$

$$= \lim_k \mu(A \cap E_k)$$

genauso $\nu(A) = \lim_k \nu(A \cap E_k) \Rightarrow \mu = \nu$ $\square$

10. Satz (Approximationssatz)

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{A} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$, sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}_1$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $B \in \mathcal{A}_1$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \triangle B) \leq \varepsilon .$$

Beweis: Sei μ_0 die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}$, dann ist μ die eindeutige Fortsetzung von μ_0 auf $\mathcal{A}_1$ nach §2.8. Es gibt also $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ mit

$B \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$, vgl. die Konstruktion von μ in §2.2-2.4. Insbesondere ist $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$.

Wähle m so, dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist

$A = \bigcup_{k=0}^{m} A_k \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$A \cap B^c \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \cap B^c \Rightarrow \mu(A \cap B^c) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) - \mu(B) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$A^c \cap B \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{m} A_k \right)^c \cap B \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{m} A_k \right)^c \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right)$$

$$\subseteq \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu(A^c \cap B) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $\mu(A \triangle B) = \mu(A^c \cap B) + \mu(A \cap B^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

Wir wenden diese Ergebnisse jetzt auf das Lebesgue-Prämaß μ auf $\mathbb{R}^n$ an.

11. <u>Def</u> Das <u>Lebesgue-Maß</u> λ auf $\mathbb{R}^n$ ist das eindeutig bestimmte Maß, das das Lebesgue-Prämaß μ auf $\mathcal{A}(n)$ auf die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{A}(n) \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$ fortsetzt, vgl. §1.22 und §2.8. Für jeden Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt also $\lambda(Q) = v(Q)$.

Sei $\mathcal{O} = \{ U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ offen} \}$

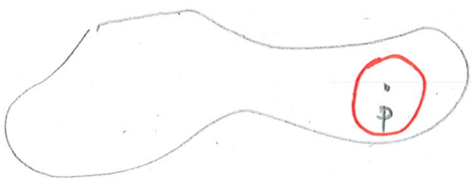
$\mathcal{C} = \{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ abg} \}$

$\mathcal{K} = \{ C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C \text{ kompakt} \}$

Dann gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{O} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \langle \mathcal{C} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \langle \mathcal{K} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.

Erinnerung an Analysis II: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist <u>offen</u>, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U$

$B_\varepsilon(p) = \{ q \in \mathbb{R}^n \mid \|p-q\|_2 < \varepsilon \}$



Es gilt: U offen $\Leftrightarrow$ U^c abg.

Es folgt sofort $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{Alg}} = \langle \mathcal{C} \rangle_{\text{Alg}}$, $\langle \mathcal{O} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \langle \mathcal{C} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$.

Ist $A \in \mathbb{R}^n$ abg., so ist $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ mit

$A_k = A \cap [-k,k]^n$, A_k kompakt (Heine-Borel), also

folgt $\langle \mathcal{C} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \langle \mathcal{K} \rangle_{\sigma\text{-Alg.}} = \langle \mathcal{O} \rangle_{\sigma\text{-Alg.}}$

Sei $\mathcal{Q}$ die Menge aller Würfel der Form

$$Q = q + \left[-\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l}\right]^n, \quad q \in \mathbb{Q}^n, \ l \geq 0$$

$$= \left\{ p \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; -\frac{1}{2^l} \leq p_i - q_i \leq \frac{1}{2^l} \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

Dann ist $\mathcal{Q}$ abzählbar (!) und $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}(n)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$, so gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$B_\varepsilon(p) \subseteq U \Rightarrow$ es gibt $q \in \mathbb{Q}^n$ und $m \in \mathbb{N}$ mit

$p \in q + \left[\frac{-1}{2^m}, \frac{1}{2^m}\right] \subseteq U$ (z.B. $2^{2m} \geq \frac{4n}{\varepsilon^2}$)

Es folgt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$,

also $\langle \mathcal{O} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

~~Andererseits: jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form $I = J \cup F$, J offenes Intervall, $F \subseteq \mathbb{R}$ endlich $\Rightarrow$ jeder Quader $Q \in \mathcal{A}(n)$ ist Vereinigung eines offenen Quaders und endlich vieler abg. Quader $\Rightarrow$~~

$\mathcal{A}(n) \subseteq \langle \mathcal{Q} \rangle_{\sigma\text{-Alg}}$. Es folgt die Behauptung.

→ Korrektur

Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich schreiben

als $I = A - F$, A abg. Intervall

$= A \cap U$ $\quad F \subseteq \mathbb{R}$ endlich

$U = \mathbb{R} - F$ offen

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n = (A_1 \cap U_1) \times \ldots \times (A_n \cap U_n)$$

$A_i \subseteq \mathbb{R}$ abg , $U_i \subseteq \mathbb{R}$ offen

$$X_i = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times (A_i \cap U_i) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$
$$= (\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times A_i \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R})$$
$$\cap (\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times U_i \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R})$$

$\leadsto X_i = B_i \cap V_i \quad B_i$ abg , V_i offen

$\Rightarrow$

$$Q = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n \in \langle \mathcal{O} \rangle_{Alg.}$$

Die Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißen <u>Borel-Mengen</u> in $\mathbb{R}^n$ (E. Borel, franz. Math., 1871–1956)

12. <u>Satz</u> (<u>Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes</u>)

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sei $t_v(p) = p + v$.

Dann gilt: (i) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $t_v(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\lambda(t_v(A)) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

<u>Bew.</u> Ist Q ein Quader, so auch $t_v(Q)$, es folgt $\{t_v(A) \mid A \in \mathcal{A}(n)\} \subseteq \mathcal{A}(n)$. Wegen $t_{-v} \circ t_v = id$ folgt $\mathcal{A}(n) = \{t_v(A) \mid A \in \mathcal{A}(n)\}$ und damit auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \{t_v(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.

Ist Q ein Quader, so gilt $\lambda(Q) = \lambda(t_v(Q))$, es folgt mit $\lambda_v(A) = \lambda(t_v(A))$, dass $\lambda_v(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(n)$. Da auch λ_v ein (Prä-)Maß ist, folgt mit §2.8, dass $\lambda_v = \lambda$. $\square$

Ganz ähnlich zeigt man folgendes. Wir setzen für $\alpha \in \mathbb{R}$ $s_\alpha(v) = \alpha \cdot v$ $s_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

13. Lemma Für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$\lambda(s_\alpha(A)) = |\alpha|^n \cdot \lambda(A)$.

Beweis Das ist richtig, wenn A ein Quader ist, also auch richtig für alle $A \in \mathcal{A}(n)$. Setze $\lambda_\alpha(A) = \lambda(s_\alpha(A))$, dann ist λ_α ein Maß und für alle $A \in \mathcal{A}(n)$ gilt $\lambda_\alpha(A) = |\alpha|^n \cdot \lambda(A)$. Es folgt mit §2.8, dass $\lambda_\alpha = |\alpha|^n \lambda$. □

14. Satz (Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes)

Es gibt genau ein Maß λ auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) $\lambda([0,1]^n) = 1$

(ii) $\lambda(t_v(A)) = \lambda(A)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Beweis Das Lebesgue-Maß erfüllt jedenfalls (i) und (ii).

Sei jetzt λ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit (i) und (ii).

Sei $Q(r) = [0,r]^n$ für $r \geq 0$ und $q(r) = \lambda(Q(r))$.

Für $m \geq 1$ folgt $1 \leq m^n q(\frac{1}{m})$

Für $m \geq 2$ folgt $(m-1)^n \cdot q(\frac{1}{m}) \leq 1$


E

Sei $E = \{0\} \times [0,1]^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow \lambda(E) \leq m^{(n-1)} \cdot q(\frac{1}{m}) \leq \frac{1}{(m-1)^n}$

Es folgt $\lambda(E) \leq \frac{m^{(n-1)}}{(m-1)^n} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m}{m-1}\right)^n$ für $m > 1$

$\leadsto \lambda(E) = 0$. Damit folgt aber für $m \geq 1$

$$q\left(\tfrac{1}{m}\right) = \lambda\left(\left(0, \tfrac{1}{m}\right)^n\right) \leq \frac{1}{m^n}, \text{ also } q\left(\tfrac{1}{m}\right) = \frac{1}{m^n}.$$

Es folgt $\lambda(Q) = v(Q)$ für jeden beschränkten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $I_1 \times \ldots \times I_n = Q$, wobei $I_1, \ldots, I_n$ (offene) Intervalle mit rationalen Enden sind ($I_k = (a_k, b_k)$, $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$). Sei $\mathcal{Z}$ die Menge der Quader. Dann ist $\mathcal{Z}$ $\cap$-stabil, $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} \supseteq \mathcal{O}$ (vgl. 2.11), also $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\sigma\text{-Alg}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nach §2.9 ist λ das Lebesgue-Maß. $\square$

15. <u>Korollar</u> Wenn μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, so gilt

$$\mu = c \cdot \lambda, \text{ wobei } \mu([0,1]^n) = c.$$

<u>Beweis</u> Sei $\mu([0,1]^n) = c$. Falls $c = 0$, so ist $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, denn $\mathbb{R}^n = \{v + [0,1]^n \mid v \in \mathbb{Z}^n\}$. Ansonsten betrachte $\hat{\lambda} = \frac{1}{c} \cdot \mu$, es folgt $\hat{\lambda} = \lambda$ (üA). $\square$

<u>Bemerkung</u> Ist $S \in GL_n(\mathbb{R})$, so gilt

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow S(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$\lambda(S(A)) = |\det(S)| \cdot \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(Übungsaufgabe mit Schritt $S = O \cdot D \cdot U$,

O, U orthogonale Matrizen, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$\det(S) = \pm d_1 \cdots d_n$ $\quad \lambda(U(A)) = \lambda(A)$
$\lambda(O(A)) = \lambda(A)$

$\lambda(D(A)) = |d_1 \cdots d_n| \cdot \lambda(A)$)

16. <u>Def</u> Ist μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, so heißt $(\mathcal{A}, \mu)$ ein <u>Maßraum</u>. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt <u>Nullmenge</u>, wenn $\mu(N) = 0$ gilt. Ein Maßraum heißt <u>vollständig</u>, wenn für jede Nullmenge N und jede Teilmenge $M \subseteq N$ gilt $M \in \mathcal{A}$ (dann ist M auch Nullmenge).

17. <u>Satz</u> Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit Maß μ (d.h. $(\mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum).

Setze $\mathcal{A}_1 = \{A \cup M \mid A \in \mathcal{A}, M \subseteq N, N \text{ Nullmenge}\}$

sowie $\mu_1(A \cup M) = \mu(A)$. Dann ist $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra, μ_1 ist ein Maß und $(\mathcal{A}_1, \mu_1)$ ist vollständig. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu_1(A) = \mu(A)$.

<u>Beweis</u>: Sei $A \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$, $N \in \mathcal{A}$ Nullmenge.

$$(A \cup M)^c = A^c \cap M^c = A^c \cap (N^c \cup (N \cap M^c))$$
$$= \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \cap M^c)}_{\subseteq N} \in \mathcal{A}_1$$

$A_k \in \mathcal{A}$, $M_k \subseteq N_k$, N_k Nullmenge

$$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cup M_k) = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k = N, \quad \mu(N) = 0.$$

Also ist $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra.

μ_1 ist wohldefiniert: $A \cup M = A' \cup M'$, $A, A' \in \mathcal{A}$, $\left.\begin{matrix} M \subseteq N \\ M' \subseteq N' \end{matrix}\right\}$ Nullmengen

$A \subseteq A' \cup N' \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(A')$

genauso $A' \subseteq A \cup N \Rightarrow \mu(A') \leq \mu(A)$

Ist $\mu_1(M) = 0$, so gibt es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $M \subseteq N$, die μ_1-Nullmengen sind genau die Teilmengen der μ-Nullmengen. Also ist $(\mathcal{A}_1, \mu_1)$ vollständig. □

Man nennt $(\mathcal{A}_1, \mu_1)$ die Vervollständigung von $(\mathcal{A}, \mu)$. Die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der <u>Lebesgue-messbaren</u> Mengen in $\mathbb{R}^n$.

Wir überlegen jetzt, dass es Teilmengen $V \subseteq \mathbb{R}$ gibt, die nicht lebesgue-messbar sind.

18. Satz (Vitali) Es gibt Teilmengen $V \subseteq [0,1]$, die nicht lebesgue-messbar sind.

Beweis Betrachte die Untergruppe $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (bzgl. Addition). Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$u \sim v \Leftrightarrow u + \mathbb{Q} = v + \mathbb{Q}$$
$$\Leftrightarrow \text{ es gibt } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } u + q = v$$

Die Äquivalenzklasse von u ist $u + \mathbb{Q} = \{v \in \mathbb{R} \mid u \sim v\}$. In jeder solchen Äquivalenzklasse wählen wir (mit dem Auswahlaxiom) einen Punkt $u_0 \in u + \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sei $V \subseteq [0,1]$ die Menge aller dieser Punkte. Es gilt also

$$\mathbb{R} = \bigcup \{v + \mathbb{Q} \mid v \in V\} = \bigcup \{q + V \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

Für $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq q$ folgt $(p+V) \cap (q+V) = \emptyset$, denn sonst $p + v_1 = q + v_2 \Rightarrow v_1 + \mathbb{Q} = v_2 + \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 = v_2$ ↯

Angenommen, $V \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, mit $\lambda(V) = a$. Es folgt $a > 0$, sonst $\lambda(\mathbb{R}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(q+V) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V) = 0$ ↯

Für $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1) = L$ folgt $q + V \subseteq [0,2]$

$$\Rightarrow \sum_{q \in L} \underbrace{\lambda(q+V)}_{=a} \leq \lambda([0,2]) = 2 \quad ↯$$

Also gilt $V \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. □