§ 10 Offene Mengen, Kurven, Differentiale

Ist $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so gibt es zu jedem $x \in (a,b)$ ein $\varepsilon > 0$ so, dass

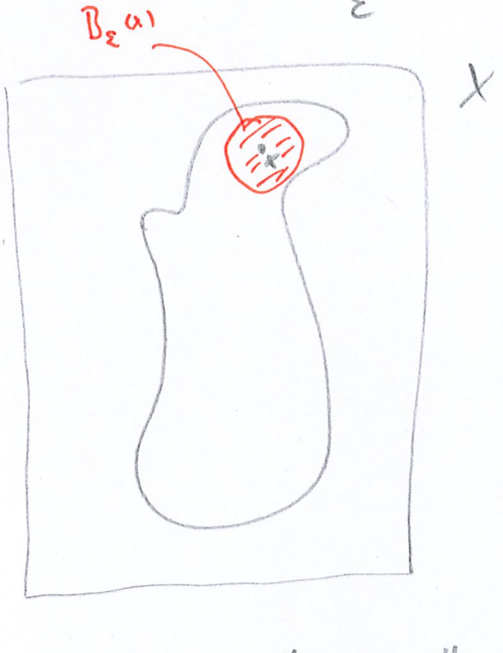
$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b) \text{ gilt (etwa } \varepsilon = \min\{x-a, b-x\}\text{)}$$

Die Teilmengen $[a,b]$ oder $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ haben diese Eigenschaft <u>nicht</u>.

1. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt <u>offen in X</u>, falls gilt:

zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in X \mid d(y,x) < \varepsilon \} \subseteq U$$



<u>Bsp.</u>
- $U = \emptyset$ ist offen in X.
- $U = X$ ist offen in X.
- Für $p \in X$, $r > 0$ ist $B_r(p) \subseteq X$ offen, denn: $d(x,p) < r \Rightarrow$ es gibt $\varepsilon > 0$ mit $d(x,p) < r - \varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(p)$.

<u>Achtung</u>: "offen" bezieht sich immer auf die umgebende Menge X.

2. Satz (Satz über offene und abgeschlossene Mengen)

Sei X ein metrischer Raum, sei $U \subseteq X$ Teilmenge, sei $A = X - U = \{x \in X \mid x \notin U\}$.

Dann sind äquivalent:

(i) U ist offen in X

(ii) A ist abg. in X.

Beweis (ii) => (i): Für $A = X$ ist $U = \emptyset$ (✓)

Sonst gilt $U \neq \emptyset$, sei $u \in U$ beliebig. Angenommen, es gäbe zu jedem $j \in \{1, 2, 3, \ldots\} = J$ ein $a_j \in A$ mit $d(a_j, u) \leq \frac{1}{j}$. Dann wäre $u = \lim_{j \in J} a_j \in A$ ↯

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$.

Es folgt $B_\varepsilon(u) \subseteq U$. Also ist U offen in X.

(i) => (ii): Für $U = X$ ist $A = \emptyset$ (✓).

Sonst ist $A \neq \emptyset$. Sei $(a_j)_{j \in J}$ konvergente Folge mit $a_j \in A$ für alle $j \in J$ und $p = \lim_{j \in J} a_j$. Wäre $p \in U$, so gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U \Rightarrow d(p, x_j) \geq \varepsilon$ für alle $j \in J$ ↯ Folglich ist $p \notin U \Rightarrow p \in A$ $\square$

3. <u>Bemerkungen</u>
- Es gibt Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen in X sind, z.B. $\emptyset$ oder X. Solche Mengen heißen manchmal "abgeschloffen" (engl. "clopen set")
- Es gibt Mengen, die weder offen noch abg. in X sind, z.B. ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abg. in $\mathbb{R}$.

4. <u>Satz</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:
   (a) Durchschnitte von <u>endlich vielen</u> offenen Teilmengen $U_1, \dots, U_k \subseteq X$ sind wieder offen in X
   (b) Vereinigungen von <u>beliebig vielen</u> offenen Teilmengen sind wieder offen in X.

<u>1. Beweis:</u> $U_1, \dots, U_k$ offen, $u \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$

$\Rightarrow$ es gibt $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(u) \subseteq U_j$.

Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \Rightarrow B_\varepsilon(u) \subseteq U_j$ für $j = 1..k$

$\Rightarrow B_\varepsilon(u) \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$

Ist $\mathcal{U}$ Menge von offenen Mengen und ist $u \in \bigcup \mathcal{U}$, so gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $u \in U$, also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. $\square$

2. Beweis U offen $\Leftrightarrow A = X - U$ abg.

$$X - (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) = \underbrace{(X-U_1) \cup (X-U_2) \cup \dots \cup (X-U_n)}_{\text{abg. nach §8.12}}$$

$\mathcal{U}$ Menge von offenen Mengen, $A = \{ \underbrace{X-U}_{\text{abg.}} \mid U \in \mathcal{U} \}$

$$\bigcup \mathcal{U} = X - \underbrace{\bigcap A}_{\text{abg nach §8.12}}$$ $\square$

5. Satz Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $V \subseteq Y$ ist $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ offen.

(iii) Für jede abg. Menge $B \subseteq Y$ ist $A = f^{-1}(B) \subseteq X$ abg.

Beweis Ist $Z \subseteq Y$ beliebig, so gilt

$$f^{-1}(Y - Z) = \{ x \in X \mid f(x) \notin Z \} = X - f^{-1}(Z)$$

Also sind (ii) und (iii) nach §10.4 äquivalent,

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i)⇒(ii): Sei $V \subseteq Y$ offen, sei $U = f^{-1}(V) \subseteq X$, sei $u \in U$. Es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(f(u)) \subseteq V$. Nach dem ε-δ-Kriterium gibt es $\delta > 0$ so, dass

$f(B_{\delta/2}(u)) \subseteq B_\varepsilon(f(u)) \subseteq V$, also $B_{\delta/2}(u) \subseteq U$.

Also ist $U \subseteq X$ offen.

(ii)⇒(i): Sei $p \in X$, sei $\varepsilon > 0$, sei $V = B_\varepsilon(f(p))$. Dann ist $U = f^{-1}(B_\varepsilon(f(p))) \subseteq X$ offen, also gibt es $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(p) \subseteq U = f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$.

Für $d_X(p,x) \leq \delta/2$ folgt $d_X(p,x) < \delta$ und damit $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$, d.h. f ist stetig in p. $\square$

6. <u>Def + Satz</u> Sei X ein metrischer Raum und sei $Z \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Der <u>Abschluss</u> von Z in X ist

$$\overline{Z} = \bigcap \{ A \subseteq X \mid A \text{ abg. in } X \ \underline{\text{und}}\ Z \subseteq A \}$$

Nach § 8.12 ist $\overline{Z}$ abg. in X. Folglich ist $\overline{Z}$ die <u>kleinste</u> (bezüglich Inklusion $\subseteq$) abg. Teilmenge von X, die Z enthält.

Bsp. • $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$ gilt immer.

Wenn $A \subseteq X$ abg. ist, so ist $\overline{A} = A$ (und umgekehrt)

• $X = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\overline{Z} = \mathbb{R}$, vgl Ana I,

Satz Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $Z \subseteq X$. Dann ist $\overline{Z}$ die Menge aller Grenzwerte derjenigen konvergenten Folgen in X, deren Folgenglieder in Z liegen.

Beweis Sei $(z_j)_{j \in J}$ eine konvergente Folge, mit $z_j \in Z$ für alle $j \in J$. Dann ist $z_j \in \overline{Z}$ und weil $\overline{Z}$ abg. ist in X, folgt $\lim_{j \in J} z_j \in \overline{Z}$.

Ist $x \in X$ und gibt es keine Folge in Z mit Grenzwert x, so gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \cap Z = \emptyset$. Für $A = X - B_\varepsilon(x)$ gilt $A \supseteq \overline{Z}$ (weil $Z \subseteq A$ und A abg. in X nach §10.2), also $x \notin \overline{Z}$. $\square$

7. **Satz** Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen $S \subseteq X$ gilt

$$f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}.$$

<u>Beweis</u> Angenommen, f ist stetig. Sei $S \subseteq X$, sei $x \in \overline{S}$. Dann gibt es eine Folge $(s_j)_{j\in J}$ in S mit $\lim_{j\in J} s_j = x$ ($s_j \in S$ für alle $j \in J$).

Es folgt $\lim_{j\in J} f(s_j) = f(x)$, also $f(x) \in \overline{f(S)}$.

Angenommen, $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ gilt für alle $S \subseteq X$.

Sei $B \subseteq Y$ abg in Y, sei $A = f^{-1}(B) \subseteq X$.

Dann gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B$, d.h. $\overline{A} \subseteq A = f^{-1}(B)$, also $\overline{A} = A$. Nach §10.5 (iii) ist f stetig. $\square$

8. <u>Def</u> Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren / erinnern

<u>offene</u> Intervalle $(a,b) = \{ t \in \mathbb{R} \mid a < t < b \}$

unbeschränkt
$$\begin{cases} (-\infty, b) = \{ t \in \mathbb{R} \mid t < b \} \\ (a, \infty) = \{ t \in \mathbb{R} \mid a < t \} \\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \end{cases}$$

Das sind offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ im Sinne von §10.1.

<u>abg. Intervalle</u>

$$[a,b] = \{ t \in \mathbb{R} \mid a \le t \le b \}$$

unbeschränkt
$$\begin{cases} (-\infty, b] = \{ t \in \mathbb{R} \mid t \le b \} \\ [a, \infty) = \{ t \in \mathbb{R} \mid a \le t \} \\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \end{cases}$$

Diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine <u>stetige Kurve</u> oder ein <u>Weg</u> in X ist eine stetige Abbildung

$c: K \to X$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes oder abg. Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

Falls $K = [a,b]$, so heißt c <u>Weg von $p = c(a)$ nach $q = c(b)$</u>.

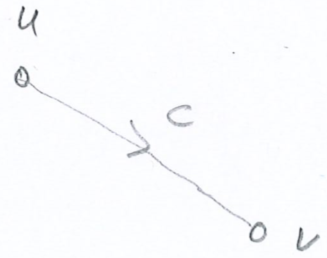
<u>Bsp</u> (a) $X = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $c: K \to \mathbb{R}$ ist stetige reelle Funktion wie in Ana I.

(b) $X = V$ normierter Vektorraum, $K = [0,1]$

$u, v \in V$ Vektoren

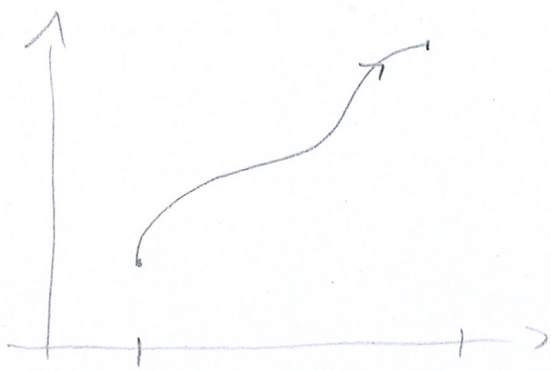
$c(t) = (1-t)\cdot u + t\cdot v$

"gerade Strecke von u nach v"



$$\|c(t) - c(s)\| = \|(t-s)v + (s-t)u\| = |t-s|\cdot\|u-v\| \rightsquigarrow \text{Lipschitzstetig}$$

(c) $f: K \to \mathbb{R}$ stetig, definiere $c(t) = (t, f(t))$



Anschauliche <u>Idee</u>: ein Punkt $c(t)$ bewegt sich abhängig von der Zeit t durch X.

Jetzt wollen wir die "Geschwindigkeit" der Bewegung bestimmen.

9. <u>Def</u> Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $c: K \to V$ eine Kurve, sei $t_0 \in K$.

Dann heißt c <u>differenzierbar</u> in t_0 mit <u>Geschwindigkeitsvektor</u> $v = \dot{c}(t_0)$, falls gilt:

für <u>jede</u> Folge $(s_j)_{j \in J}$ in $K - \{t_0\}$ $(s_j \in K, s_j \neq t_0)$ mit $\lim\limits_{j \in J} s_j = t_0$ gilt

$$v = \lim_{j \in J} \frac{1}{s_j - t_0} \left(c(s_j) - c(t_0) \right)$$

⌜ d.h. $\lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{s_j - t_0}\left(c(s_j)-c(t_0)\right) - v \right\| = 0$ ⌟

<u>Äquivalente (und sehr nützliche!) Umformulierung:</u>

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subseteq K$ (K ist offen!)

Dann ist c diff'bar in t_0 mit Ableitung v genau dann, wenn die Abbildung $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$

$$p(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}\left(c(t_0+h) - c(t_0)\right) & h \neq 0 \\ v & h = 0 \end{cases}$$

<u>stetig in 0 ist.</u>

<u>Denn</u> Wenn p stetig ist in 0, so folgt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{s_j-t_0}\left(c(s_j)-c(t_0)\right) = \lim_{j\to\infty} p(s_j-t_0) = p(0) = v$$

Umgekehrt: wenn c diff'bar ist in t_0 und wenn p wie oben definiert ist, dann ist p stetig in 0.

Denn sonst gäbe es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ gilt $|p(h_n) - p(0)| > \varepsilon$ mit $|h_n| < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\left(c(t_0+h_n) - c(t_0)\right) \neq v \qquad \square$$

Bem Aus Diff'barkeit in t_0 folgt Stetigkeit in t_0, denn $c(t_0+h) = h(p(h) + \dot{c}(t_0))$ ist stetig in $h=0$

Falls c in jedem $t \in K$ diff'bar ist, so heißt c differenzierbar. Falls zusätzlich die Abbildung $t \mapsto \dot{c}(t)$ stetig ist, so heißt c stetig differenzierbar.

10. Satz Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|.\|$,

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$$

$$c : K \to \mathbb{R}^n.$$

Dann ist c genau dann diff'bar in $t_0 \in K$, wenn $c_1, \dots, c_n$ diff'bar in t_0 sind, und dann ist $\dot{c}(t_0) = (c_1'(t_0), \dots, c_n'(t_0))$

Beweis Sei $(s_j)_{j \in J}$ Folge in $K - \{t_0\}$ mit $\lim_{j \in J} s_j = t_0$. Dann gilt für $v \in \mathbb{R}^n$,

$v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\lim_{j \in J} \left\| \frac{1}{s_j - t_0} (c(s_j) - c(t_0)) \right\| = 0 \overset{\S 9.15}{\iff}$$

$$\lim_{j \in J} \left\| \frac{1}{s_j - t_0} (c(s_j) - c(t_0)) \right\|_1 = 0 \iff$$

$$\lim_{j \in J} \frac{1}{s_j - t_0} \left(c_k(s_j) - c_k(t_0) \right) = v_k \qquad k = 1, \dots, n .$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

<u>Bsp</u> $\quad V = \mathbb{R}^3, \; K = \mathbb{R}, \; c(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

$$\dot{c}(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\ddot{c}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

Die 2. Ableitung einer Kurve heißt auch <u>Beschleunigung</u>.

11. <u>Rechenregeln für Geschwindigkeiten</u>

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, V normierter Vektorraum, sei $c : K \to V$ (stetig) diffbare Kurve. Dann gilt Folgendes.

(i) Wenn $e : K \to V$ (stetig) diffbare Kurve ist, so auch
$$e + c : K \to V, \quad t \longmapsto e(t) + c(t)$$
mit $\dot{\overline{e+c}}\,(t) = \dot{e}(t) + \dot{c}(t)$

(Addition von Geschwindigkeiten)

(ii) Ist $a: K \to \mathbb{R}$ (stetig) diff'bar, so auch $a \cdot c : K \to V$, $t \mapsto a(t) \cdot c(t)$ und

$$\dot{\widehat{a \cdot c}}(t) = a'(t) \cdot c(t) + a(t) \cdot \dot{c}(t)$$

(Produktregel)

(iii) Ist $L \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und ist $f: L \to K$ (stetig) diff'bar, so auch $c \circ f : L \to V$, $t \mapsto c(f(t))$ und

$$\dot{\widehat{c \circ f}}(t) = f'(t) \cdot \dot{c}(f(t))$$

(Kettenregel)

(iv) Ist $g: V \to W$ stetig lineare Abbildung (W normierter Vektorraum), so ist $g \circ c : K \to W$ (stetig) diff'bar und

$$\dot{\widehat{g \circ c}}(t) = g(\dot{c}(t))$$

Bew.: Setze $p(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t)) & h \neq 0 \\ \dot{c}(t) & h = 0 \end{cases}$

$p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$, wobei $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq K$ gelte.

Dann ist p stetig und $\dot{c}(t) = p(0)$

(i) Setze $q(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(e(t+h) - e(t)) & h \neq 0 \\ \dot{e}(t) & h = 0 \end{cases}$

damit $\frac{1}{h}(e(t+h) + c(t+h) - e(t) - c(t)) = p(h) + q(h)$

das ist stetig in $h=0$ $\leadsto$ $\dot{c}(t)+\dot{e}(t) = \dot{\overline{c+e}}(t)$.

(ii) Setze $q(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(a(t+h)-a(t)) & h \neq 0 \\ a'(t) & h=0 \end{cases}$

$$\frac{1}{h}\left(a(t+h)c(t+h) - a(t)c(t)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(a(t+h)c(t+h) - a(t+h)c(t) + a(t+h)c(t) - a(t)c(t)\right)$$

$$= a(t+h)\,p(h) + q(h)\,c(t) \qquad \text{stetig in } h=0$$

und dort $a(t)\dot{c}(t) + a'(t)\cdot c(t)$

(iii) Setze $q(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) & h \neq 0 \\ f'(t) & h=0 \end{cases}$

$$\frac{1}{h}\left(c(f(t+h)) - c(f(t))\right) = p(f(t+h)-f(t))\cdot q(h)$$

stetig in $h=0$ und dort $f'(t)\,\dot{c}(f(t))$

$\left(\text{hier } p(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(c(f(t)+h)-c(f(t))) & h \neq 0 \\ \dot{c}(f(t)) & h=0 \end{cases}\right)$

(iv) $\frac{1}{h}\left(g(c(t+h)) - g(c(t))\right) = \frac{1}{h}g\left(c(t+h)-c(t)\right)$

$$= g(p(h))$$

stetig in $h=0$, dort $g(\dot{c}(t))$.

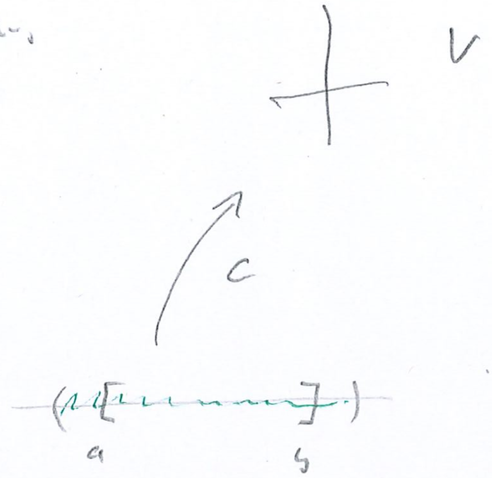
$\square$

#

12. **Def** Sei $c: [a,b] \to V$ eine Kurve, V ein normierter Vektorraum. Wir sagen, dass c (stetig) diff'bar auf $[a,b]$ ist, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt und eine Fortsetzung

$$c: (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \longrightarrow V$$

die (stetig) diff'bar ist.



13. **Def** Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, sei V ein normierter Vektorraum, sei $c: [a,b] \to V$ stetig diff'bare Kurve. Die Kurvenlänge von c ist

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt.$$

Idee: $\|\dot{c}(t)\|$ ist der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Die zurückgelegte Wegstrecke erhält man durch Integration.

Bsp $c(t) = (1-t)\cdot u + t \cdot v \qquad u, v \in V$

$\dot{c}(t) = v - u \qquad c: [0,1] \to V$

$$\int_0^1 \|\dot{c}(t)\| \, dt = \int_0^1 \|v-u\| \, dt = \|v-u\|$$

<u>Satz</u> Sei $c: [a,b] \to V$ stetig diff'bare Kurve. Sei weiter $\alpha: [r,s] \to [a,b]$ stetig diff'bar mit $\alpha'(t) > 0$ für alle $t \in [r,s]$ <u>und</u> $\alpha(r) = a$, $\alpha(s) = b$. Dann gilt

$$L(c) = L(c \circ \alpha)$$

die Kurvenlänge ändert sich nicht bei <u>Umparametrisierung</u> ($\hat{=}$ es ist für die zurückgelegte Strecke egal, wie schnell man sich bewegt).

<u>Beweis</u> Setze $l(x) = \int_a^x \|\dot{c}(t)\| dt$ $\leadsto$ l ist diff'bar mit $l'(x) = \|\dot{c}(x)\|$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Betrachte $l \circ \alpha : [r,s] \to \mathbb{R}$, mit Ableitung

$$(l \circ \alpha)'(t) = l'(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{>0} = \|\dot{c}(\alpha(t))\| \cdot |\alpha'(t)|$$

$$= \|\alpha'(t)\dot{c}(\alpha(t))\| = \|\dot{\overline{c \circ \alpha}}(t)\|, \text{ damit}$$

$$L(c \circ \alpha) = \int_r^s \|\dot{\overline{c \circ \alpha}}(t)\| dt = l(\alpha(s)) - l(\alpha(r)) = l(c(b)) - l(c(a))$$

$$= L(c)$$

$\square$

Erinnerung an Analysis I: Eine Funktion

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ist diff'bar in $t\in(a,b)$

genau dann, wenn es eine Funktion $p:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$

gibt, die stetig ist in $h=0$, mit

$$p(h)=\begin{cases}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h} & h\neq 0\\ f'(t) & h=0\end{cases}$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$h\cdot p(h)=f(t+h)-f(t)\quad\text{, also}$$

$$\begin{aligned}f(t+h)&=f(t)+h\cdot p(h)\\&=f(t)+h\cdot f'(t)+h\,(p(h)-p(0))\\&=f(t)+h\cdot f'(t)+|h|\cdot\lambda(h)\end{aligned}$$

$$\text{mit } \lambda(h)=\begin{cases}p(h)-p(0) & \text{für } h\geq 0\\ p(0)-p(h) & \text{für } h<0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ λ stetig in $h=0$ und $\lambda(0)=0$.

14. __Def__ Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen in V, sei $f: U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir sagen, f ist differenzierbar in $u \in U$, falls es eine stetige lineare Abbildung $g: V \to \mathbb{R}$ gibt (also $g \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$) und eine Abbildung $\lambda : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\lambda(0) = 0$

(ii) λ ist stetig in 0

so, dass für alle $h \in V$, $\|h\| < \varepsilon$ gilt

$$f(u+h) = f(u) + g(h) + \|h\| \cdot \lambda(h)$$

Dabei sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(u) \subseteq U$ (U ist offen).

__Lemma__ In dieser Situation sind g, λ eindeutig bestimmt durch f (und u und ε).

__Beweis__ Angenommen, $\tilde{g}$ und $\tilde{\lambda}$ lösen das Problem auch. Es folgt für $0 < t \leq 1$, dass

$$(g - \tilde{g})(t \cdot h) = (\tilde{\lambda}(th) - \lambda(th))\|t \cdot h\| \qquad (t > 0)$$

$$\Rightarrow (g - \tilde{g})h = (\tilde{\lambda}(th) - \lambda(th))\|h\| \qquad \text{jetzt Grenzwert } t \to 0$$

$$\Rightarrow (g - \tilde{g})(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \tilde{g} \quad \text{denn}$$

$g, \tilde{g}$ stimmen überein auf $B_\varepsilon(0)$ und für jeden Vektor $v \in V$ gibt es ein $r > 0$ mit $r \cdot v \in B_\varepsilon(0) \leadsto g(r \cdot v) = \tilde{g}(rv)$

$$\Rightarrow r \cdot g(v) = r \cdot \tilde{g}(v) \leadsto g(v) = \tilde{g}(v)$$

($g, \tilde{g}$ sind linear).

Es folgt $\lambda = \tilde{\lambda}$. $\square$

Wir schreiben jetzt

$$g = df(u)$$

das Differential von f im Punkt u.

Also: $df(u) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ ist eine stetige Linearform und es gilt

$$f(t+h) = f(t) + df(u)(h) + \|h\| \cdot \lambda(h)$$

$$\lambda(0) = 0$$

Wir sagen, f ist differenzierbar auf U, wenn f in jedem Punkt $u \in U$ diff'bar ist. Wir nennen f stetig diff'bar auf U, falls die Abbildung

$$u \longmapsto df(u)$$

$$U \longrightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V^*$$

stetig ist. (V^* ist der Dualraum von V,

seine Elemente sind die stetigen Funktionale
(= linearen Abbildungen) $V \to \mathbb{R}$.)

Wenn $f: U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar ist, dann
ist die Abbildung

$$U \times V \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto df(u)(v)$$

stetig, mit $|df(u)(v)| \leq \underbrace{\|df(u)\|}_{\text{Operatornorm}} \cdot \|v\|$

<u>Beispiel</u> (→ Analysis I) Ist $U = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ offenes
Intervall und $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar, so ist
$df(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung

$$df(u)(v) = f'(u) \cdot v \qquad \begin{array}{l} u \in (a,b) = U \\ v \in \mathbb{R} \end{array}$$

#

15. <u>Satz</u> Sei V ein normierter Vektorraum,
$U \subseteq V$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ (stetig) diff'bar.

Sei $c: K \to U \subseteq V$ (stetig) diff'bare
$K \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall
Kurve. Dann ist auch

$$f \circ c: K \to \mathbb{R} \qquad \text{(stetig) diff'bar}$$

und es gilt in $t \in K$

$$(f \circ c)'(t) = df(c(t))(\dot c(t))$$

Beweis Setze $p(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t)) & h \neq 0 \\ \dot c(t) & h = 0 \end{cases}$

$$f(u+v) - f(u) = df(u)(v) + \lambda(v)\|v\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\big(f(c(t+h)) - f(c(t))\big)$$

$$= \frac{1}{h}\Big(f(\underbrace{c(t)}_{=u} + \underbrace{c(t+h) - c(t)}_{=v}) - f(\underbrace{c(t)}_{=u})\Big)$$

$$= \frac{1}{h}\big(df(u)(v) + \lambda(v)\cdot\|v\|\big)$$

$$= df(u)(p(h)) + \lambda(h\cdot p(h))\underbrace{\frac{|h|}{h}}_{=\pm 1}\|p(h)\| \qquad \text{stetig in } h = 0$$

in $h=0$ erhalten wir

$$(f \circ c)'(t) = df(c(t))(\dot c(t))$$ $\square$

16. Wichtiger Spezialfall von § 10.15:

Richtungsableitungen

Sei $U \subseteq V$ offen, V normierter Vektorraum, sei $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar, sei $u \in U$. Sei $v \in V$ beliebig, setze $c(t) = u + t \cdot v$. Für $\varepsilon > 0$ geeignet ist $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ diff'bare Kurve.

Die Richtungsableitung von f in u in Richtung v ist

$$D_v f(u) = df(u)(v),$$

Noch spezieller: $V = \mathbb{R}^n$, Standard-Basis $e_1, \dots, e_n$, $e_k = (0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Man schreibt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(u) = df(u)(e_k) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(u + h e_k) - f(u)\right)}_{\text{Ableitung wie in Analysis I}}$$

Und nennt das die k-te partielle Ableitung von f.

17. Beispiel $U = V = \mathbb{R}^3$ (mit beliebiger Norm)

$$f(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 - u_1 u_2 + u_3^2 \qquad u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$h = (h_1, h_2, h_3)$$

$$f(u+h) = f(u) + 2 h_1 u_1 - h_1 u_2 - u_1 h_2 + 2 u_3 h_3 + h_1^2 - h_1 h_2 + h_3^2$$

Vermutung: $df(u)(h) = 2 h_1 u_1 - h_1 u_2 - u_1 h_2 + 2 u_3 h_3$

und $\lambda(h) \cdot \|h\| = h_1^2 - h_1 \cdot h_2 + h_3^2$

Die partiellen Ableitungen können wir jedenfalls berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) = 2 u_1 - u_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(u) = 2 u_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(u) = -u_2$$

Wir werden die Vermutung gleich allgemein beweisen.

18. Satz Sei V normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen und sei $C^1(U, \mathbb{R}) = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ ist stetig diff'bar$\}$

Dann ist $C^1(U, \mathbb{R})$ ein Vektorraum und ein Ring. Es gilt für $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$, $u \in U$, $s \in \mathbb{R}$ folgendes:

$d(f+g)(u) = df(u) + dg(u)$

$d(s\cdot f)(u) = s\cdot df(u)$

$d(f\cdot g)(u) = f(u)\,dg(u) + g(u)\,df(u)$
(Leibniz regel)

Beweis: Schritt

$f(u+h) = f(u) + df(u)(h) + \|h\|\cdot\lambda(h)$ $\quad \lambda(0)=0$

$g(u+h) = g(u) + dg(u)(h) + \|h\|\cdot\mu(h)$ $\quad \mu(0)=0$

λ, μ stetig in 0

$\Rightarrow (f+g)(u+h) = f(u+h) + g(u+h)$

$= f(u)+g(u) + \underbrace{(df(u)+dg(u))}_{\text{linear + stetig}}(h) + \|h\|\underbrace{(\lambda(h)+\mu(h))}_{\substack{\text{stetig in } h=0\\ \lambda(0)+\mu(0)=0}}$

$s\cdot f(u+h) = s f(u) + \underbrace{s\cdot df(u)}_{\text{linear und stetig}}(h) + \|h\|\cdot \underbrace{s\cdot\lambda(h)}_{\substack{\text{stetig in } h=0\\ s\cdot h(0)=0}}$

$f(u+h)g(u+h) = f(u)\cdot g(u) + \underbrace{g(u)\cdot df(u)}_{\text{linear + stetig}}(h) + \underbrace{f(u)\cdot dg(u)}_{\text{linear + stetig}}(h)$

$+ \underbrace{df(u)(h)\,dg(u)(h)}_{=A(h)} + \|h\|^2\lambda(h)\mu(h)$

$+ \|h\|\, df(u)(h)\mu(h) + \|h\|\, dg(u)(u)\lambda(u)$

$+ \|h\|\,\lambda(h)g(u) + \|h\|\mu(h)f(u)$

$|A(h)| = |df(u)(h)|\cdot|dg(u)(h)| \le \|df(u)\|\cdot\|h\|\cdot\|dg(u)\|\cdot\|h\|$

$= \|df(u)\|\cdot\|dg(u)\|\cdot\|h\|^2$

damit ist $\varphi(h) = \begin{cases} \frac{1}{\|h\|} A(h) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$

stetig in $h = 0$ ┘

Wir haben also insgesamt

$$f(u+h)g(u+h) = f(u)g(u) + \underbrace{(g(u)\, df(u) + f(u)\, dg(u))(h)}_{\text{linear + stetig}}$$

$$+ \|h\| \underbrace{\left(\|h\| \lambda(h)\mu(h) + \lambda(h)\, dg(u)(h) + \mu(h)\, df(u)(h) + \varphi(h) + \lambda(h) g(u) + \mu(h) f(u) \right)}_{\text{stetig in } h=0 \text{ und dort } = 0}$$ □

19. <u>Def</u> Sei V normierter Vektorraum, sei
$\alpha : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann ist α
stetig diff'bar mit (konstantem) Differential

$$d\alpha(u)(h) = \alpha(h) \qquad (\text{hängt } \underline{\text{nicht}} \text{ von } u \in V \text{ ab})$$
$$= d\alpha(h)$$ □

<u>Denn</u> $\alpha(u+h) = \alpha(u) + \alpha(h)$.

<u>Konvention</u> Im $\mathbb{R}^n$ schreiben wir die <u>k-te Koordinate</u> als

$x_k(h) = h_k \qquad h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ mit Differential

$dx_k(h) = h_k$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ist

$f : U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, so gilt

$$(*) \quad df(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\, dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\, dx_n$$

Beweis Setze $h = e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

in linke und rechte Seite von $(*)$ ein.

$$\partial f(u)(e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(u) \quad \text{(nach Definition der partiellen Ableitung)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\, dx_1(e_k) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\, dx_n(e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(u)\, \underbrace{dx_k(e_k)}_{=1}$$

Also ist $(*)$ korrekt für $h = e_1,\dots,e_n$. Beide Seiten sind lineare Abbildungen, die auf der Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ übereinstimmen, also gleich. $\square$

Zurück zu Bsp §10.17, $U = \mathbb{R}^3 = V$
$u = (u_1, u_2, u_3)$

$$f(u) = u_1^2 - u_1 u_2 + u_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) = 2u_1 - u_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) = -u_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(u) = 2u_3$$

$h = (h_1, h_2, h_3)$

$$df(u)(h) = (2u_1 - u_2)\, dx_1(h) - u_1\, dx_2(h) + 2u_3\, dx_3(h)$$

d.h. $df(u)(h) = (2u_1 - u_2)\cdot h_1 - u_1 \cdot h_2 + 2u_3 \cdot h_3$. #

20. Der Gradient Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: U \to \mathbb{R}$ (stetig) diff'bar. Der Gradient von f in $u \in U$ ist der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \frac{\partial f}{\partial x_2}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\right) = \nabla f(u)$$

Erinnerung: das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist $\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$. Damit gilt

$$df(u)(h) = \langle Df(u) | h \rangle$$

für $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Gradient und Differential bestimmen sich also gegenseitig.

21. <u>Theorem</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig diff'bar auf U

(ii) für jedes $u \in U$, $k = 1, \ldots, n$ existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + te_k) - f(u)}{t}$$

<u>und</u> die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sind stetig auf U.

<u>Beweis</u> <u>(i) ⇒ (ii):</u> Wenn f stetig diffbar ist, so ist $u \longmapsto df(u)$ stetig und damit auch

$$u \longmapsto df(u)(e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(u), \text{ denn}$$

$$| df(u)(e_k) - df(v)(e_k) | \leq \| df(u) - df(v) \| \cdot \underbrace{\| e_k \|}_{\text{const.}}$$

(ii) => (i): Angenommen, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ist stetig auf U, für $k = 1, .., n$.

1. Schritt Falls gilt $\frac{\partial f}{\partial x_k}(v) = 0$ für $k = 1, .., n$, so ist f diff'bar in v, mit $df(v) = 0$

Denn: Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es $\delta > 0$ so, dass

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$ für alle u mit $\|u - v\|_2 \leq \delta$
alle $k = 1, .., n$

Mit dem MWS §6.11 folgt für $\|u - v\|_2 \leq \delta$, dass

$$|f(u_1, v_2, .., v_n) - f(v_1, .., v_n)| \leq |u_1 - v_1| \cdot \frac{\varepsilon}{n} \overset{CSU}{\leq} \|u - v\|_2 \cdot \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|f(u_1, u_2, v_3, .., v_n) - f(u_1, v_2, .., v_n)| \leq |u_2 - v_2| \cdot \frac{\varepsilon}{n} \leq \|u - v\|_2 \cdot \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\vdots$$

$$|f(u_1, .., u_n) - f(u_1, .., u_{n-1}, v_n)| \leq |u_n - v_n| \cdot \frac{\varepsilon}{n} \leq \|u - v\|_2 \cdot \frac{\varepsilon}{n}$$

damit $|f(u) - f(v)| \leq \|u - v\|_2 \cdot \varepsilon$. Folglich ist

$$\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{\|h\|}(f(v+h) - f(v)) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

stetig in $h = 0$ und damit ist f diff'bar in v mit $df(v) = 0$ $\square$

2. Schritt f ist diff'bar in jedem $v \in U$, mit
$$df(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(v)\, dx_k$$

Denn: Betrachte $\underbrace{\tilde{f}(u) = f(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(v)(u_k - v_k)}_{\in C^1(U,\mathbb{R})}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(u) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(v) \quad \text{stetig}$$

Nach Schritt 1 ist $\tilde{f}$ diff'bar in v mit $d\tilde{f}(v) = 0$.

Folglich ist f diff'bar in v, mit $df(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(v)\, dx_k$. □

3. Schritt f ist stetig diff'bar.

Denn nach Schritt 2 ist f diff'bar in jedem $v \in U$, mit $df(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(v)\, dx_k$ und die rechte Seite ist stetig auf U. □

22. Def Sei X ein metrisch Raum, sei $f: X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f hat in $p \in X$ ein Maximum (Minimum), falls für alle $x \in X$ gilt $f(p) \geq f(x)$ (bzw. $f(p) \leq f(x)$). Das Maximum (Minimum) heißt strikt, falls $f(p) > f(x)$ (bzw $f(p) < f(x)$) für alle $x \neq p$.

Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in B_\varepsilon(p)$ (bzw $f(p) \leq f(x)$ für alle $x \in B_\varepsilon(p)$), so spricht man von einem lokalen Maximum (Minimum).

23. Satz Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f: U \to V$ diff'bar. Wenn f in $p \in U$ ein lokales Extremum hat, so gilt $df(p) = 0$.

Bew. Sei $v \in V$ beliebig, betrachte $c(t) = p + t \cdot v$. Dann gilt

$(f \circ c)'(0) = 0$ nach Ana I, § 6.9, weil $f \circ c$ in $t=0$ ein lokales Extremum hat. Aber $(f\circ c)'(0) = df(p)(v)$. Also ist $df(p)(v) = 0$ für alle $v \in V$, d.h. $df(p) = 0$ $\square$

24. <u>Beispiel</u> $V = U = \mathbb{R}^2$

(a) $f(u) = u_1^2 + u_2^2$

$df(u) = 2u_1\, dx_1 + 2u_2\, dx_2$, $df(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Paraboloid, Minim in $u=0$

(b) $f(u) = \cos(u_1^2 + u_2^2)$

$df(u) = -2\sin(u_1^2+u_2^2)(u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2)$

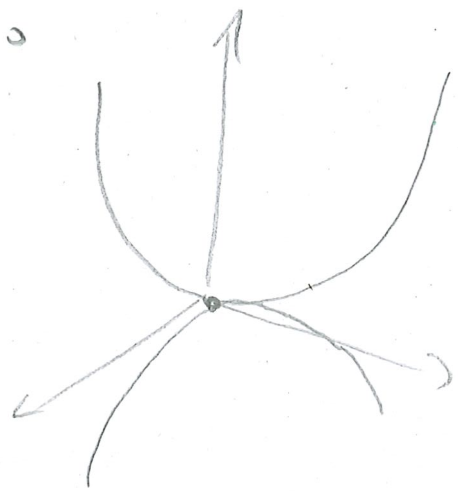
$df(u) = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = k\cdot\pi$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(c) $f(u) = u_1^2 - u_2^2$

$df(u) = 2u_1\,dx_1 - 2u_2\,dx_2$

$df(u) = 0 \iff u = 0$ aber kein lokales

Extremum in $u = 0$



Das Kriterium $df(u) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend. $\leadsto$ Wir müssen höhere Ableitungen von f betrachten, nicht nur df.