§8 Metrische und normierte Räume

<u>Idee</u> Auf einer Menge X von "Punkten" wollen wir einen Abstandsbegriff einführen. Der Abstand soll eine (dimensionslose) reelle Zahl ≥ 0 sein.

1. <u>Def</u> Sei X eine Menge. Eine Funktion

$$d: X \times X \to \mathbb{R} \qquad (u,v) \longmapsto d(u,v)$$

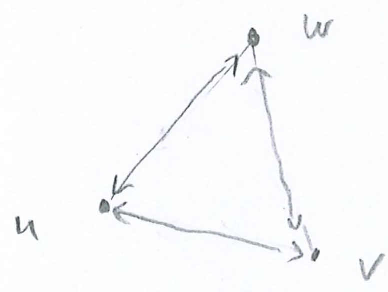
heißt <u>Metrik</u> auf X, wenn folgendes gilt.

(M1) Für alle $u, v \in X$ ist $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$.
(symmetrisch + positiv)

(M2) $d(u,v) = 0$ gilt genau dann, wenn $u = v$
(d trennt Punkte)

(M3) Für alle u, v, w gilt die <u>Dreiecksungleichung</u>

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$$



Man nennt dann (X,d) einen <u>metrischen Raum</u>.

2. <u>Beispiele</u> (a) $X = \mathbb{R}$, $d(u,v) = |u-v|$

(M1): $|u-v| = |v-u|$ (✓)

(M2): $|u-v| = 0 \Leftrightarrow u-v=0$ (✓)

(M3): $|u-w| \leq |u-v| + |v-w|$ (✓) vgl. §1.6

(b) X beliebige Menge, $d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u=v \\ 1 & \text{falls } u \neq v \end{cases}$

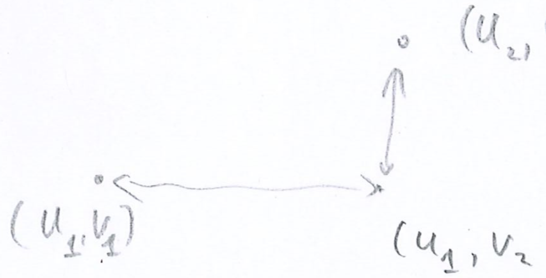
(M1), (M2) klar

(M3): $u = w \Rightarrow d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ (✓)

$u \neq w \Rightarrow v \neq u$ oder $v \neq w \Rightarrow d(u,w) = 1 \leq d(u,v) + d(v,w)$)

Man nennt d die <u>diskrete Metrik</u> auf X.

(c) $X = \mathbb{R}^2$, $d((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$



"Manhattan Taxi-Metrik"

(M1), (M2) sind klar.

$$(M_3):\ d((u_1,u_2),(w_1,w_2)) = |u_1 - w_1| + |u_2 - w_2|$$

$$\leq |u_1 - v_1| + |v_1 - w_1| + |u_2 - v_2| + |v_2 - w_2|$$

$$= d((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + d((v_1,v_2),(w_1,w_2))$$

3. <u>Beobachtung</u> Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, so ist A bezüglich der Einschränkung von d auf $A \times A$ ein metrischer Raum (A,d), ein <u>Unterraum</u>.

4. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $r>0$, sei $x \in X$. Dann heißt

$$B_r(x) = \{ u \in X \mid d(x,u) < r \}$$

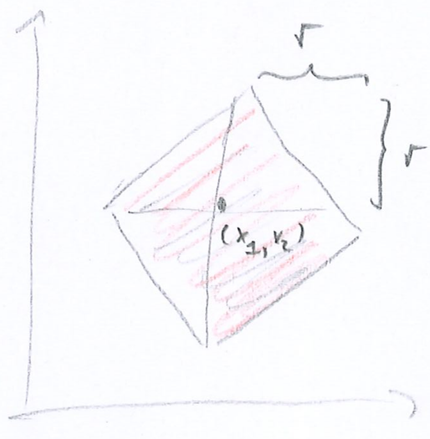
der <u>offene r-Ball</u> um x.

Im Beispiel 2: (a) $B_r(x) = (x-r, x+r) \subseteq \mathbb{R}$

(b) $r < 1 \Rightarrow B_r(x) = \{x\}$

$r \geq 1 \Rightarrow B_r(x) = X$

(c) $x = (x_1, x_2)$ $B_r(x)$



5. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $J \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge. Eine <u>Folge</u> in X ist eine Abbildung $J \longrightarrow X$

$j \longmapsto a_j$

die jedem Index $j \in J$ einen Punkt $a_j \in X$ zuordnet. Schreibe kurz $(a_j)_{j \in J}$ für diese Folge.

Die Folge $(a_j)_{j \in J}$ <u>konvergiert</u> gegen $a \in X$

wenn gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $d(a_j, a) \leq \varepsilon$ für <u>alle</u> $j \geq n$.

6. <u>Lemma</u> Sei $(a_j)_{j \in J}$ eine Folge im metrisch Raum (X,d). Sei $a \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) die Folge konvergiert gegen a

(ii) für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $a_j \in B_\varepsilon(a)$ für alle $j \geq n$ gilt.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i): $a_j \in B_\varepsilon(a) \Rightarrow d(a_j, a) < \varepsilon$
$\Rightarrow d(a_j, a) \leq \varepsilon$

(i) $\Rightarrow$ (ii): $d(a_j, a) \leq \varepsilon \Rightarrow d(a_j, a) < 2 \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow a_j \in B_{2\cdot\varepsilon}(a)$ $\square$

7. <u>Lemma</u> Eine Folge $(a_j)_{j \in J}$ konvergiert gegen <u>höchstens</u> einen Punkt $a \in X$.

Schreibe dann kurz $\lim\limits_{j \in J} a_j = a$.

<u>Beweis</u> Angenommen, $(a_j)_{j\in J}$ konvergiert gegen a und b, mit $a\neq b$. Setze $\varepsilon = d(a,b) > 0$. Wähle $n\in\mathbb{N}$ so, dass $d(a_j,a)\leq\frac{\varepsilon}{3}$ und $d(a_j,b)\leq\frac{\varepsilon}{3}$ für alle $j\geq n$. Es folgt $d(a,b)\leq d(a,a_j)+d(b,a_j)$
$$\leq \frac{2}{3}\varepsilon \quad ↯ \qquad \square$$

Was bedeutet Konvergenz in den Beispielen 2?

(a) $X=\mathbb{R}$, $d(u,v)=|u-v|$ $\rightsquigarrow$ Konvergenz genau wie in Analysis I, § 2.13.

(b) X mit diskreter Metrik d. Setze $\varepsilon=\frac{1}{2}$
$d(a_j,a)\leq\varepsilon \Rightarrow a_j=a$. Ist also $d(a_j,a)\leq\frac{1}{2}$ für alle $j\geq n$, so ist schon $a_j=a$, d.h.
$(a_j)_{j\in J}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow a_j=a$ für <u>fast alle</u> $j\in J$.

(c) $X=\mathbb{R}^2$ mit Taxi-Metrik $d(\underbrace{(u_1,u_2)}_{=u},\underbrace{(v_1,v_2)}_{=v})$
$$=|u_1-v_1|+|u_2-v_2|.$$

$$\rightsquigarrow |u_1-v_1|\leq d(u,v)$$
$$|u_2-v_2|\leq d(u,v)$$

sowie $|u_1-v_1|, |u_2-v_2|\leq\varepsilon \Rightarrow d(u,v)\leq 2\cdot\varepsilon$

also $\lim u_j = u$ $\qquad u_j=(u_{1,j},u_{2,j})$, $u=(u_1,u_2)$

$$\Leftrightarrow \lim_{j\in J} u_{1,j}=u_1$$
<u>und</u> $\lim\limits_{j\in J} u_{2,j}=u_2$

8. <u>Def</u> Eine Folge $(a_j)_{j\in J}$ im metrisch Raum (X,d) heißt <u>Cauchy-Folge</u>, falls gilt:

(CF) zu jeden $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i,j \geq n$ gilt $d(a_i, a_j) \leq \varepsilon$. ✱

9. <u>Satz</u> Sei (X,d) ein metrisch Raum, sei $(a_j)_{j\in J}$ eine konvergente Folge in X. Dann ist diese Folge eine <u>Cauchy-Folge</u>. Kurz:
<u>konvergente Folgen sind stets Cauchy-Folgen</u>.

<u>Beweis</u> Sei $a = \lim\limits_{j\in J} a_j$, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $d(a_j, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j \geq n$.
Für $i,j \geq n$ folgt $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a) + d(a, a_j)$
$\leq \varepsilon$ □

10. <u>Def</u> Ein metrischer Raum (X,d) heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Bsp 2, wieder.

(a) $X = \mathbb{R}$, $d(u,v) = |u-v|$ $\rightsquigarrow$ vollständig, §3.2.

(b) X mit diskreter Metrik. Sei $(a_j)_{j\in J}$ Cauchy-Folge. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt aus (CF): $a_i = a_j$ für $i,j \geq n$ $\rightsquigarrow$ $(a_j)_{j\in J}$ konvergiert, (X,d) ist vollständig.

(c) $\mathbb{R}^2$ mit Taxi-Metrik ist vollständig (ÜA).

(d) $X = \mathbb{Q}$, $d(u,v) = |u-v|$ ist <u>nicht</u> vollständig.

Sei $(a_j)_{j\in J}$ Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{j\in J} a_j = \sqrt{2}$, vgl §4.1. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ hat diese Folge in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert.

(e) $X = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad d(u,v) = |u-v|$

$a_j = \frac{1}{j}$ $\quad j = 1,2,3,\ldots$ $\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{j\in J} a_j = 0 \notin X$

$\rightsquigarrow$ Cauchy-Folge, aber <u>nicht</u> konvergent. Also ist (X,d) <u>nicht</u> vollständig.

11. Def Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt abgeschlossen in X, wenn Folgendes gilt

(Abg) Ist $(a_j)_{j\in J}$ eine konvergente Folge in X, mit $a_j \in Y$ für alle $j \in J$, so ist auch $\lim_{j\in J} a_j \in Y$.

Beispiel (a) $\emptyset, X \subseteq X$ sind immer abg. in X.

(b) $Y = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist abg. in $\mathbb{R}$ bzgl $d(u,v) = |u-v|$, denn: $(a_j)_{j\in J}$ konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_j \leq 1$ für alle $j \in J$ mit $\lim_{j\in J} a_j = a$, so gilt $0 \leq a \leq 1$.

[Denn: wäre $a < 0$, so gibt es j mit $a \leq a_j \leq \frac{a}{2}$ ↯ genauso gilt nicht $a > 1$.]

(c) $Y = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Denn $a_i = \frac{1}{i}$, $J = \{1,2,3,\ldots\}$ $\rightsquigarrow$ $a_i \in Y$ für alle i, aber $0 = \lim_{i\in J} a_i \notin Y$.

12. <u>Satz</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(a) Vereinigungen von <u>endlich vielen</u> abg. Teilmengen $A_1, .., A_k \subseteq X$ sind wieder abg. in X.

(b) Durchschnitte von <u>beliebig vielen</u> abg. Teilmengen sind wieder abg. in X.

<u>Beweis</u> (a) Induktion nach k. $k=0,1$ klar.

<u>$k=2$:</u> $B = A_1 \cup A_2$, sei $(b_i)_{i\in J}$ Folge in B mit Grenzwert $x \in X$. Setze $J_1 = \{i \in J \mid b_i \in A_1\}$
$J_2 = \{i \in J \mid b_i \in A_2\}$

$\Rightarrow$ J_1 oder J_2 ist unendlich. OE J_1 unendlich.

Es folgt $x = \lim\limits_{i\in J_1} b_i \Rightarrow x \in A_1 \subseteq B$.

Jetzt $k \to k+1$ $\quad B = \underbrace{A_1 \cup .. \cup A_k}_{= C} \cup A_{k+1}$

C abg. nach Ind. annahme, $C \cup A_{k+1} = B$ abg nach Fall $k=2$. $\square$

(b) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von abg. Teilmengen von X, sei $B = \bigcap \mathcal{A} = \{ b \in X \mid$ für <u>alle</u> $A \in \mathcal{A}$ ist $b \in A\}$

Sei $(b_i)_{i\in J}$ Folge in B mit $\lim\limits_{j\in J} b_j = x$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für jedes } A \in \mathcal{A} \\ \text{jedes } i \in J\end{array}\right. \text{ gilt } \left. b_i \in A \right\} \Rightarrow x \in A$$

$\Rightarrow x \in A$ für alle $A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \bigcap \mathcal{A}$ $\square$

Bem Vereinigung von unendlich vielen abg. Mengen sind im allgemein nicht abg. Zum Beispiel

$$A_n = [0 + \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1)$$ ist nicht abg. in $\mathbb{R}$.

13. Satz Sei X ein metr. Raum, sei $A \subseteq X$.

(a) Falls A vollständig ist, so ist A abg. in X.

(b) Falls X vollständig ist und $A \subseteq X$ abg., so ist A vollständig.

Beweis (a) Sei $(a_j)_{j\in J}$ konvergente Folge, $a_j \in A$ für alle $j \in J$, $x = \lim_{j\in J} a_j$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass $d(a_i, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i \geq m$. Für $i,j \geq m$ folgt $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, x) + d(x, a_j) \leq \varepsilon$.

Da A vollständig ist, gibt es $a \in A$ mit $\lim_{j\in J} a_j = a$.

Also ist $x = a \in A$.

(b) Sei $(a_j)_{j\in J}$ Cauchy-Folge in A. Da X vollständig ist, gibt es $x \in X$ mit $\lim_{j\in J} a_j = x$.

Da $A \subseteq X$ abg. ist, folgt $x \in A$. $\square$

#

Vollständigkeit ist eine Eigenschaft von metrischen Räumen,
Abgeschlossenheit ist eine Eigenschaft von Teilmengen von metrisch Räumen.

Bsp $A = (0, \frac{1}{2}] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \}$

A ist abg. in $X = (0,1)$, $d(u,v) = |u-v|$
A ist nicht abg. in $\mathbb{R}$, $d(u,v) = |u-v|$

In der Analysis II interessieren uns vor allem gewisse Metrik auf Vektorräumen.

14. Def Sei V ein reeller Vektorraum (beliebiger Dimension). Eine Norm $\|.\|$ auf V ist eine Abbildung

$$\|.\| : V \to \mathbb{R} \quad \text{mit folgend Eigenschaften}$$

(N1) $\|v\| \geq 0$ für alle Vektoren $v \in V$
und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ (Nullvektor)

(N2) Für alle $s \in \mathbb{R}$, $v \in V$ gilt

$$\| s \cdot v \| = |s| \cdot \| v \|$$

Es folgt $\| -v \| = |-1| \cdot \| v \| = \| v \|$

(N3) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt

$$\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \| \qquad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

<u>Beispiele</u> (a) $V = \mathbb{R}$, $\| u \| = |u|$, vgl. Analysis I, § 1.6.

(b) $V = \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$

$\| u \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ sogenannte <u>l_1-Norm</u> auf $\mathbb{R}^n$

(c) $V = \mathbb{R}^n$, $\| u \|_\infty = \max\{ |u_1|, \dots, |u_n| \}$

sogenannte l_∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$

15. <u>Satz</u> Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Für $u, v \in V$ setze

$d(u,v) = \|u-v\|$. Dann ist d eine Metrik auf V.

<u>Beweis</u> (M1) $\|u-v\| = \|v-u\| \geq 0$ (v)

(M2) $\|u-v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$ (v)

(M3) $\|u-w\| = \|u-v+v-w\| \leq \|u-v\| + \|v-w\|$ (v)

Jeder normierte Vektorraum "ist" also ein metrischer Raum.

16. <u>Def</u> Ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$ heißt <u>Banach-Raum</u>, falls er vollständig ist, d.h. falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

[Stefan Banach, polnischer Mathematiker 1892–1945]

<u>Beispiel</u> (a) $\mathbb{R}^n$ ist sowohl bezüglich $\|.\|_1$ als auch bezüglich $\|.\|_\infty$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis Sei $(v_j)_{j\in J}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, schreibe $v_j = (v_{1,j}, \dots, v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt $|v_{k,j} - v_{k,i}| \le \|v_j - v_i\|_\infty \le \|v_j - v_i\|_1$
$i, j \in J$

Ist die Folge also eine Cauchyfolge bzgl. $\|.\|_\infty$ oder bezüglich $\|.\|_1$, so ist $(v_{k,j})_{j\in J}$ für jedes k eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Setze $v_k = \lim_{j\in J} v_{k,j}$, $k = 1, \dots, n$.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k = 1, \dots, n$ und $j \ge m$ gilt

$|v_k - v_{k,j}| < \frac{\varepsilon}{n}$. Es folgt $\|v - v_j\|_1 \le \varepsilon$,

also auch $\|v - v_j\|_\infty \le \varepsilon$ für $j \ge m$. $\square$

Wir beweisen später: $\mathbb{R}^n$ ist bezüglich jeder Norm vollständig.

Beispiel (b) $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervall

$V = B([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt} \}$

Das ist ein reeller Vektorraum, vgl Ana I, § 5.1.

Die <u>Supremumsnorm</u> von $f \in B(A,\mathbb{R})$ ist $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}$ und wir haben in § 5.3 bewiesen, dass $\|.\|_\infty$ eine Norm ist. In § 5.5 haben wir weiter bewiesen, dass $(B(A,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ vollständig ist, d.h. ein <u>Banach-Raum</u>.

<u>Beispiel (c)</u> Sei weiter $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Erinnerung: $R(A,\mathbb{R}) \subseteq B(A,\mathbb{R})$ war der Raum der <u>Regelfunktionen</u> (= beschränkte Funktionen, die bzgl. $\|.\|_\infty$ Grenzwerte von Stufenfunktionen sind.), vgl § 5.10.

In § 5.10 haben wir gezeigt, dass $R(A,\mathbb{R}) \subseteq B(A,\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Nach § 8.13 ist $R(A,\mathbb{R})$ also auch ein Banachraum mit Norm $\|.\|_\infty$.

<u>Beispiel (d)</u> Sei $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$

Nach dem Satz von Weierstraß ist jede auf $[a,b]$ stetige Funktion f beschränkt, also $C([a,b],\mathbb{R}) \subseteq B([a,b],\mathbb{R})$.

Sogar $C([a,b],\mathbb{R}) \subseteq R([a,b],\mathbb{R})$, vgl § 5.14.

<u>Satz</u> $C([a,b],\mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $B([a,b],\mathbb{R})$ bzgl $\|.\|_\infty$ und folglich ein Banachraum.

Bew. Sei $(f_i)_{i\in J}$ eine Folge stetiger Funktionen in $C([a,b],\mathbb{R})$, die gegen $f\in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ konvergiert. Sei $\varepsilon>0$, sei $x\in[a,b]$. Wähle $m\in J$ so, dass $\|f_m - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Wähle $\delta>0$ so, dass $|f_m(y)-f_m(x)|\le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle y mit $|y-x|\le\delta$.

Es folgt
$$|f(y)-f(x)| \le |f(y)-f_m(y)| + |f_m(y)-f_m(x)| + |f_m(x)-f(x)| \le \varepsilon$$
für $|y-x|\le\delta$. Folglich ist f stetig. $\square$

Hier haben wir die "ε-δ-Definition" von Stetigkeit benutzt.

17. Def Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung
$$h: V\times V \to \mathbb{R}, \quad (u,v)\mapsto h(u,v)$$
heißt Bilinearform, wenn folgendes für alle Vektoren $u,v,w\in V$ und alle $s\in\mathbb{R}$ gilt:

$$h(u+v,w) = h(u,w) + h(v,w)$$
$$h(u,v+w) = h(u,v) + h(u,w)$$
$$h(su,v) = h(u,sv) = s\cdot h(u,v)$$

#

Falls zusätzlich gilt $h(u,v) = h(v,u)$, so heißt h symmetrisch.

Schließlich heißt h <u>inneres Produkt</u> oder <u>Skalarprodukt</u> oder <u>positiv definit</u>, falls h symmetrisch ist <u>und</u> falls gilt:

$h(v,v) \geq 0$ für alle v <u>und</u>

$h(v,v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^n$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

quadratische Matrix, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$h(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \cdot a_{ij} v_j$$

Das ist eine Bilinearform, die genau dann symmetrisch ist, wenn A symmetrische Matrix ist, d.h. wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j. Zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow h(u,v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Das ist das <u>Standard-Skalarprodukt</u> auf $\mathbb{R}^n$.

Klar: $h(u,u) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 \geq 0$

$h(u,u) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$

Ist h ein Skalarprodukt auf V, so schreibt man oft $h(u,v) = \langle u | v \rangle$.

18. <u>Def + Satz</u> Sei V ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt $\langle . | . \rangle$. Für $v \in V$ setze $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ (das geht, weil $\langle v | v \rangle \geq 0$). Dann ist $\|.\|$ eine Norm auf V und man nennt $(V, \langle . | . \rangle)$ einen <u>Prä-Hilbertraum</u>. Falls V vollständig ist bezüglich der Norm $\|.\|$, so heißt $(V, \langle | \rangle)$ <u>Hilbertraum</u>.

(David Hilbert, 1862–1943, deutscher Mathematiker)

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^n$, $\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

$\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ heißt <u>Euklidische Norm</u> auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Beweis</u>, dass $\|.\|$ wirklich eine Norm ist

(N1) $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle} \geq 0$ klar

$\|v\| = 0 \Leftrightarrow \langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (vgl §8.17)

(N2) $\|s \cdot v\| = \sqrt{\langle sv | sv \rangle} = \sqrt{s^2 \langle v | v \rangle} = \sqrt{s^2} \cdot \sqrt{\langle v | v \rangle}$

$= |s| \cdot \|v\|$ (✓)

Für (N3) (Dreiecksungleichung) brauchen wir einen Satz.

19. Satz (Satz von Cauchy-Schwarz)

Sei $\langle | \rangle$ ein inneres Produkt. Dann gilt für alle $u, v \in V$ die Ungleichung

$$|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v linear abhängig sind, d.h. wenn $u = s \cdot v$ oder $v = tu$ für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis $0 \leq \| \langle u|v\rangle u - \|u\|^2 v \|^2$

$$= \langle u|v\rangle^2 \|u\|^2 - 2\langle u|v\rangle\langle u|v\rangle\|u\|^2 + \|u\|^4 \cdot \|v\|^2$$

$$= \|u\|^2 \left(\underbrace{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u|v\rangle^2} \right)$$

also $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq \langle u|v\rangle^2$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|u\| = 0$ oder $\langle u|v\rangle u = \|u\|^2 v$, dann sind u, v linear abhängig.

Umgekehrt: wenn $u = s \cdot v$, dann $|\langle u|v\rangle| = |s|\|u\|^2 = \|u\| \cdot \|v\|$ $\square$

ähnlich für $v = t \cdot u$

Jetzt folgt (N3) mit

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u|v\rangle + \|v\|^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

$\square$

20. <u>Bsp</u> $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt.

Die CSU besagt dann

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)$$

(klassische Form der Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Die zugehörige Norm heißt <u>l_2-Norm</u>

$\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}$ oder <u>euklidische Norm</u>.

21. Es gilt stets in $\mathbb{R}^n$, dass

$$\|u\|_1 \geq \|u\|_2 \geq \|u\|_\infty \geq \frac{1}{n}\|u_1\|$$

<u>Beweis</u> $\|u\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n |u_i|^2 = \|u\|_2^2$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \geq \max\{|u_1|^2, |u_2|^2, \ldots, |u_n|^2\}$$
$$= \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|\}^2 = \|u\|_\infty^2$$

$$n\|u\|_\infty = n\cdot\max\{|u_1|,\ldots,|u_n|\} \geq |u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|$$
$$= \|u\|_1$$

Wichtige Folgerung aus diesen Ungleichungen:

die drei Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ liefern den gleichen Konvergenzbegriff auf $\mathbb{R}^n$. Bezüglich jeder dieser Normen ist $\mathbb{R}^n$ vollständig, also ein Banachraum. Insbesondere ist $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ ein Hilbertraum.

22. Beispiel Es sei $l_2(\mathbb{N})$ der Raum aller reellen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$ konvergiert.

Satz $l_2(\mathbb{N})$ ist ein Hilbertraum, mit

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i \qquad \begin{aligned} a &= (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \\ b &= (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) \end{aligned}$$

#

Beweis Nach der klassischen CSU gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=0}^{m} |a_i b_i|\right)^2 \leq \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 \cdot \sum_{k=0}^{m} |b_k|^2$$

Also ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ absolut konvergent, wenn $a, b \in l_2(\mathbb{N})$. Es folgt mit

$$\sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=0}^{m} a_i^2 + 2\sum_{i=0}^{m} a_i b_i + \sum_{i=0}^{m} b_i^2,$$

dass $a+b = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots) \in l_2(\mathbb{N})$

Für $s \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich auch $s \cdot a = (sa_0, sa_1, sa_2, \dots) \in l_2(\mathbb{N})$. Damit ist $l_2(\mathbb{N})$ ein reeller Vektorraum.

Weiter ist $\langle a | b \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ ein inneres Produkt, mit zugehöriger Norm $\| a \|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2}$.

<u>Behauptung</u> $(l_2(\mathbb{N}), \|.\|_2)$ ist vollständig, also ein Hilbertraum.

Sei $(a_j)_{j \in \mathbb{J}}$ eine Cauchy Folge in $l_2(\mathbb{N})$.

Jedes einzelne a_j ist also eine Folge

$$a_j = (a_{0,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, \dots) \in l_2(\mathbb{N})$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \mathbb{J}$ gilt nun

$$(a_{k,i} - a_{k,j})^2 \leq \| a_i - a_j \|_2^2 .$$

Folglich ist die reelle Folge $(a_{k,j})_{j \in \mathbb{J}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Sei $b_k = \lim_{j \in \mathbb{J}} a_{k,j}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\| a_i - a_j \|_2 \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq m$ gilt.

Also $\sum_{k=0}^{n} (a_{k,i} - a_{k,j})^2 \leq \varepsilon^2$ für $i,j \geq m$

es folgt $\sum_{k=0}^{n} (\underbrace{b_k}_{=\lim_{i \in J} a_{k,i}} - a_{k,j})^2 \leq \varepsilon^2$ für $j \geq m$

Das gilt für jedes n, es folgt $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - a_{k,j})^2 \leq \varepsilon^2$

d.h. $\| b - a_j \|_2 \leq \varepsilon$ für $j \geq m$, d.h.

$\lim_{j \in J} a_j = b$. ⊛ $\square$

Der Raum $l_2(\mathbb{N})$ ist "der Hilbertraum" der Quantenmechanik.

23. __Bemerkung__ Nicht jede Norm kommt von einem inneren Produkt. Das kann man so sehen: ist $\|u\|^2 = \langle u | u \rangle$ für ein inneres Produkt, so ist

$\langle u+v | u+v \rangle = \langle u | u \rangle + 2 \langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle$, d.h.

$\langle u | v \rangle = \frac{1}{2} (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$, damit bestimmt $\|.\|$ das innere Produkt $\langle | \rangle$ eindeutig.

Für $V = \mathbb{R}^n$, $\|.\| = \|.\|_1$ wird die rechte Seite __keine__ Bilinearform ($\to$ Ü A)

(*) Es folgt $b \in l_2(\mathbb{N})$, denn:

$\| b - a_j \|_2 \leq 1$ für ein $j \in J$, also $b - a_j \in l_2(\mathbb{N})$

sowie $a_j \in l_2(\mathbb{N}) \Rightarrow b = b - a_j + a_j \in l_2(\mathbb{N})$,

weil wir schon wissen, dass $l_2(\mathbb{N})$ ein Vektorraum ist.