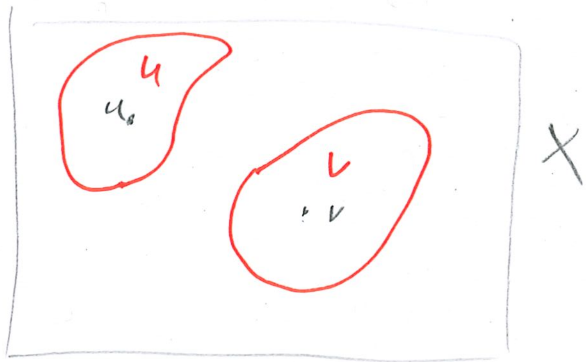
§2 Trennungsaxiome und Kompaktheit

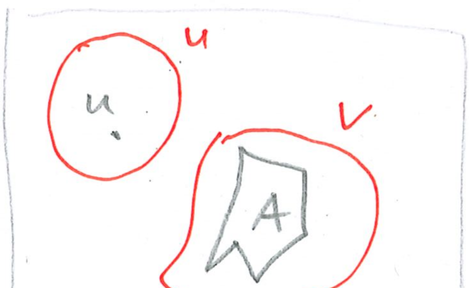
1. Def Sei X ein top. Raum.

(T_1) Wir nennen X ein T_1- Raum, wenn für jedes $u \in X$ die Menge $\{u\} \subseteq X$ abg. ist.

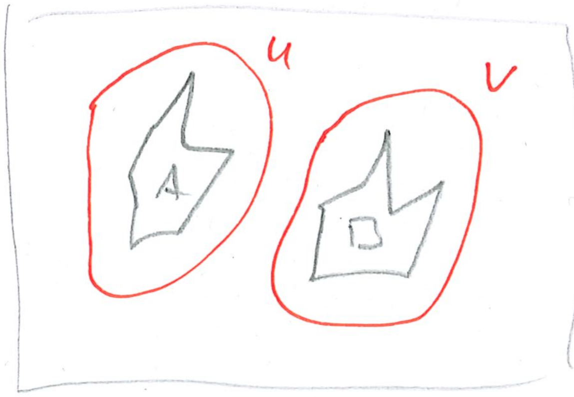
(T_2) Wir nennen X ein T_2- Raum oder Hausdorff-Raum, wenn es für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $u \in U$, $v \in V$ und $U \cap V = \emptyset$



(T_3) Wir nennen X ein T_3-Raum oder regulär, wenn X ein T_1- Raum ist und wenn es für jedes $u \in X$, $A \subseteq X$ abg mit $u \notin A$ offene Mengen U, V gibt mit $u \in U$, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



(T_4) Wir nennen X ein <u>T_4-Raum</u> oder <u>normal</u>, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für alle $A, B \subseteq X$ abg. mit $A \cap B = \emptyset$ stets $U, V \subseteq X$ offen gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$



<u>Klar</u>: $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$

$$\Downarrow$$

$$T_1$$

<u>Lemma</u> Es gilt $T_2 \Rightarrow T_1$, also $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

<u>Beweis</u> Sei $u \in X$. Zu jedem $v \in X$, $v \neq u$ gibt es $W_v \subseteq X$ offen mit $u \notin W_v$, $v \in W_v$. Damit ist

$X - \{u\} = \bigcup_{v \neq u} W_v$ offen. $\square$

<u>Achtung</u>: manche Autoren definieren "normal" und "regulär" anders (ohne T_1).

<u>Beispiel</u> (a) Die Klumpentopologie auf $X = \mathbb{N}$ ist <u>nicht</u> T_1

(b) Die koendliche Topologie auf $X = \mathbb{N}$ ist T_1, aber nicht T_2.

Denn: Für $U, V \subseteq \mathbb{N}$, U, V offen in koendlich Topologie, $U, V \neq \emptyset$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

2. **Satz** Jeder metrische Raum ist normal (also insbesondere regulär und Hausdorffsch).

Beweis Sei (X, d) metr. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt, $A \cap B = \emptyset$. Zu jedem $a \in A$ gibt es $\varepsilon_a > 0$ mit $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$. Zu jedem $b \in B$ gibt es $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Setze

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a/2}(a) \qquad V = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b/2}(b)$$

$\leadsto$ $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, U, V offen.

Beh: $U \cap V = \emptyset$. Denn wäre $z \in U \cap V$, so gäbe es $a \in A$, $b \in B$ mit $z \in B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap B_{\varepsilon_b/2}(b)$

$$\Rightarrow d(a,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \Rightarrow d(a,b) < \varepsilon_a \text{ oder } d(a,b) < \varepsilon_b \ \lightning$$

$\square$

<u>Satz</u> Sei $(X,<)$ angeordnet. Dann ist die Ordnungstopologie Hausdorffsch.

<u>Beweis</u> Seien $u,v \in X$, $u \neq v$. OE $u<v$. Falls es z gibt mit $u<z<v$ setze $U=(-\infty,z)$ $V=(z,\infty)$. Falls es kein solches z gibt setze $U=(-\infty,v)$, $V=(u,\infty)$. $\square$

<u>Bem</u> Die Ordnungstopologie ist sogar normal.

3. <u>Satz A</u> Sei X ein top. Raum, sei $\Delta X = \{(u,u) \mid u \in X\} \subseteq X \times X$. Dann sind äquivalent:

(i) X ist Hausdorffsch

(ii) $\Delta X \subseteq X \times X$ ist abg.

<u>Beweis</u> ΔX abg $\Leftrightarrow$ für alle $u,v \in X$ mit $u \neq v$ gibt es $U,V \subseteq X$ offen mit $(u,v) \in U \times V$ und $(U \times V) \cap \Delta X = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

<u>Satz B</u> Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist regulär

(ii) für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $u \in U$ gibt es $V \subseteq X$ offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). Setze $A = X - U$ $\Rightarrow$ es gibt V, W offen mit $A \subseteq W$, $u \in V$, $V \cap W = \emptyset$. Es folgt $\overline{V} \subseteq X - W \subseteq X - A = U$. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $u \in X$, $A \subseteq X$ abg., $u \notin A$. Setze $U = X - A$, wähle V offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Setze $W = X - \overline{V}$ $\rightsquigarrow$ $A \subseteq W$ und $W \cap V = \emptyset$. $\square$

4. <u>Satz</u> Sei X ein T_m-Raum, $m = 1, 2, 3$. Sei $Y \subseteq X$ Teilraum. Dann ist auch Y ein T_m-Raum.

<u>Beweis</u> <u>$m=1$</u>: Sei $y \in Y$ $\rightsquigarrow$ $\overline{\{y\}} = \{y\}$ $\Rightarrow$ $\{y\} \subseteq Y$ ist abg. in Y.

<u>$m=3$</u>: Sei $y \in Y$ und $A \subseteq Y$ abg. in Teilraumtopologie, mit $y \notin A$. Dann ist $\overline{A} \cap Y = A$, also $y \notin \overline{A}$ $\rightsquigarrow$ es gibt $U, V \subseteq X$ offen mit $y \in U$, $\overline{A} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$

$\rightsquigarrow$ $y \in \underbrace{U \cap Y}_{\text{offen in } Y}$ $\quad A \subseteq \underbrace{V \cap Y}_{\text{offen in } Y}$

<u>$m=2$</u>: Wie $m=3$ mit $A = \{z\}$. $\square$

<u>Bem.</u> Unterräume von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal, Beispiele sind kompliziert.

5. <u>Satz</u> Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von top. Räumen, mit $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Sei $m = 1, 2, 3$. Dann sind äquivalent:

(i) Jedes X_k ist ein T_m-Raum

(ii) $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist ein T_m-Raum (in der Produkttopologie).

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $k \in I$, wähle $z_i \in X_i$ für alle $i \in I$.

Sei $Y = \{ y \in X \mid y_i = z_i$ für alle $i \neq k \}$

Betrachte $f: X_k \longrightarrow Y$, $x \longmapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = \begin{cases} z_i & i \neq k \\ x & i = k \end{cases}$

Dann ist f stetig (nach § 1.16) mit stetiger Inversen $pr_k|_Y : Y \to X$, also ist Y homöomorph zu X_k.

Nach § 2.4 ist Y ein T_m-Raum, also auch X_k.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

m = 1: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$, setze

$W_i = \{ w \in X \mid w_i \neq z_i \}$. Dann ist $W \subseteq X$ offen,

also ist $X - \{z\} = \bigcup_{i\in I} W_i$ offen. □

m = 3: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$ und $U \subseteq X$ offen mit $z \in U$. Dann gibt es $I_0 \subseteq I$ endlich, $W_i \subseteq X_i$ offen $W_i = X_i$ für $i \notin I_0$, $z \in W = \prod_{i\in I} W_i \subseteq U$.

Für jedes $j \in I_0$ wähle $V_j \subseteq W_j$ mit $z_j \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq W_j$

Für $j \in I - I_0$ setze $V_j = X_j$. Es folgt mit $\underbrace{V = \prod_{i \in I} V_i}_{\text{offen}}$

$$z \in V \subseteq \prod_{i \in I} \overline{V_i} \subseteq W \subseteq U.$$

Wieso ist $\prod_{i \in I} \overline{V_i}$ abgeschlossen, denn: setze $A_k =$

$\{(x_i)_{i \in I} \mid x_k \in \overline{V_k}\} \Rightarrow A_k$ $\underline{\text{abg}}$ und $\prod_{i \in I} \overline{V_i} = \bigcap_{k \in I} A_k$. $\square$

$\underline{m = 2}$: Ähnlich wie $m = 3$. $\square$

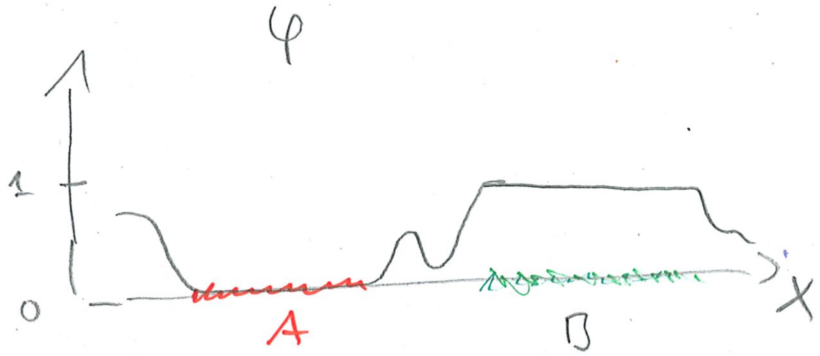
#

$\underline{\text{Bem}}$ Produkte von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal. • ZB $X = \mathbb{R}$ mit Sorgenfrey-Topologie, vgl. §1.6 $\Rightarrow$ X normal, $X \times X$ nicht normal (→ Munkres).

• Ist I überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^I$ nicht normal.

Normale Räume sind wichtig, weil es auf ihnen viele stetige reelle Funktionen gibt.

7. $\underline{\text{Def}}$ Sei X ein top. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to [0,1]$ heißt $\underline{\text{Urysohn-Funktion}}$ für (A, B) wenn $\varphi(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $\varphi(b) = 1$ für alle $b \in B$



(P. S. Urysohn, 1898–2024, sowjetischer Mathematiker)

<u>Theorem</u> (Lemma von Urysohn) Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist normal (T_4-Raum)

(ii) für alle abg. Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ existiert eine Urysohn-Funktion für (A, B).

<u>Beweis</u> <u>(ii) => (i):</u> Sei $A, B \subseteq X$ abg, $A \cap B = \emptyset$. Sei φ Urysohn-Funktion für (A, B). Setze $U = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ $V = \varphi^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Dann sind U, V offen und disjunkt, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

<u>(i) => (ii):</u> Sei $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$. Sei $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. Setze $U_0 = U$, $U_1 = X - B$, $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Wir wählen eine Bijektion $l : \mathbb{N} \to S$ mit $l_0 = 0$, $l_1 = 1$. Jetzt definieren wir rekursiv offene Mengen U_s, für $s \in S$ so, dass gilt:

(*) $\quad s < t \Rightarrow U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_t$

Angenommen, U_s ist bereits definiert für $s = l_0, l_1, \dots l_m$.

Schreibe $\{l_0, \dots, l_m\} = \{ s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1 \}$

Dann gibt es j mit $s_j < l_{m+1} < s_{j+1}$ und

$U_{s_j} \subseteq \overline{U_{s_j}} \subseteq U_{s_{j+1}}$. Da X normal ist, gibt es

$\tilde{U}', \tilde{V}' \subseteq X$ offen mit $\overline{U_{s_j}} \subseteq \tilde{U}'$ und $X - U_{s_{j+1}} \subseteq \tilde{V}'$

und $\tilde{U}' \cap \tilde{V}' = \phi$. Es folgt $\overline{\tilde{U}'} \subseteq U_{s_{j+1}}$.

Wir setzen $U_{l_{m+1}} = \tilde{U}'$.

Damit ist ⊛ erfüllt für alle $s, t \in \{l_0, \dots, l_{m+1}\}$.

Fahre so fort so ⊛ erfüllt für alle $s, t \in S$.

Für $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ setze $U_q = \phi$ und

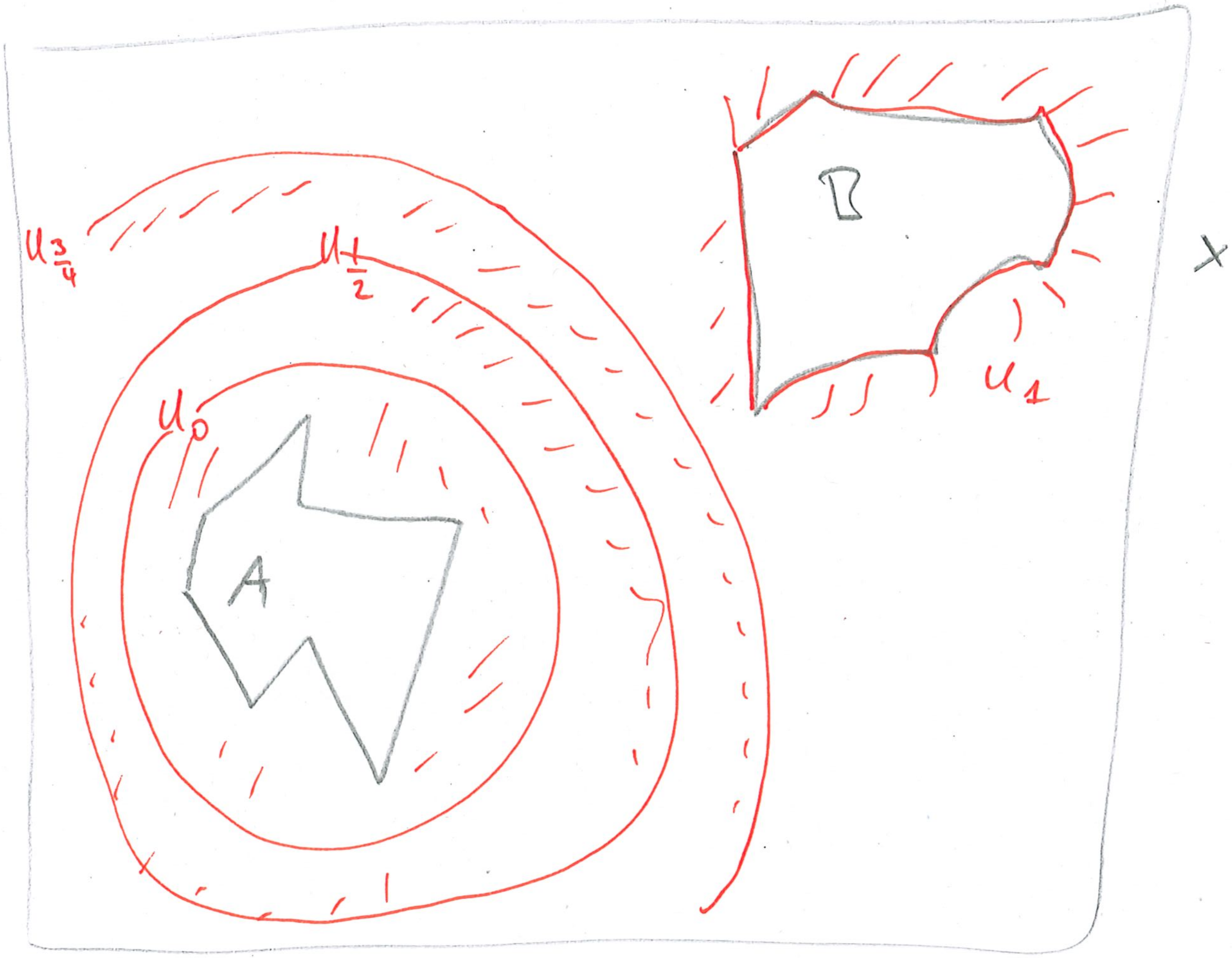
$U_q = X$ für $q > 1$. Damit ist U_q für alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

Für $x \in X$ sei $Q(x) = \underbrace{\{ q \in \mathbb{Q} \mid x \in U_q \}}_{\neq \phi}$

sowie $\varphi(x) = \inf Q(x)$.

Es folgt $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Für $a \in A$ ist $\varphi(a) = 0$,

für $b \in B$ ist $\varphi(b) = 1$.



X
$U_{3/4}$
$U_{1/2}$
U_0
A
B
U_1

Behauptung: φ ist stetig.

Zunächst gilt: $x \in \overline{U_s} \Rightarrow \varphi(x) \leq s$
$x \in X - U_s \Rightarrow \varphi(x) \geq s$.

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, sei $x \in X$ mit $\alpha < \varphi(x) < \beta$.

Dann gibt es $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha < s < \varphi(x) < t < \beta$.

Setze $W = U_t - \overline{U_s} \Rightarrow W$ ist offen.

Für $z \in X - U_t$ ist $\varphi(z) \geq t$, für $z \in \overline{U_s}$ ist $\varphi(z) \leq s$,

also ist $x \in W$, d.h. W ist Umgebung von x.

Für $z \in W$ gilt $\varphi(z) \leq t$ und $\varphi(z) \geq s$, also

$\varphi(z) \in [s,t] \subseteq (\alpha, \beta)$. Damit ist $\varphi(W) \subseteq (\alpha, \beta)$,

also ist φ stetig. $\square$

Unser nächstes Ziel ist Tietzes Fortsetzungssatz.

8. **Lemma A** Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi: A \to [-c, c]$ stetig, $c > 0$.

Dann gibt es $\psi: X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ stetig mit

$$|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3}c \quad \text{für alle } a \in A$$

Beweis Setze $A_+ = \{a \in A \mid \varphi(a) \geq \frac{1}{3}c\}$
$A_- = \{a \in A \mid \varphi(a) \leq -\frac{1}{3}c\}$

Nach Urysohns Lemma §2.7 gibt es $\lambda : X \to [0,1]$ stetig mit $\lambda|_{A_-} = 0$, $\lambda|_{A_+} = 1$. Setze

$\psi(x) = 2(\lambda(x) - \frac{1}{2}) \cdot \frac{c}{3} \leadsto \psi|_{A_+} = \frac{c}{3}$, $\psi|_{A_-} = -\frac{c}{3}$,

$\psi(X) \subseteq [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$. Für $a \in A_+$ ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3}c$ und für $a \in A_-$ ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3}c$. Ist $-\frac{1}{3}c < \varphi(a) < \frac{1}{3}c$, so ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3}c$. □

Lemma B Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi : A \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es $\Phi : X \to [-1,1]$ stetig so, dass $\Phi|_A = \varphi$.

Beweis Nach Lemma A gibt es $\psi_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ stetig mit $|\varphi(a) - \psi_0(a)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $a \in A$.
Wieder mit Lemma A gibt es $\psi_1 : X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ stetig mit $|(\varphi(a) - \psi_0(a)) - \psi_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ usw

$\leadsto \psi_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ stetig

$|\varphi(a) - \psi_0(a) - \ldots - \psi_n(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ für alle $a \in A$.

Setze jetzt $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \Rightarrow |\Phi(x)| \le \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. Für $a \in A$ gilt $\Phi(a) = \varphi(a)$.

<u>Beh: Φ ist stetig.</u> Denn: sei $\varepsilon > 0$, sei $x \in X$.

Dann gibt es $m \ge 0$ so, dass $\frac{1}{3} \sum_{k > m} \left(\frac{2}{3}\right)^k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei V eine Umgebung von x so, dass für alle $v \in V$ gilt

$\sum_{k=0}^{m} \| \psi_k(x) - \psi_k(v) \| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt für $v \in V$,

dass $|\Phi(x) - \Phi(v)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, also ist

Φ stetig. $\square$

\#

<u>Lemma C</u> Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abg.,

sei $\varphi : A \to (-1,1)$ stetig. Dann gibt es $\Phi : X \to (-1,1)$

stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

<u>Beweis</u> Nach Lemma B gibt es $\Phi' : X \to [-1,1]$

stetig mit $\varphi = \Phi'|_A$. Sei $B = \{x \in X \mid |\Phi'(x)| = 1\}$

Dann ist $B \subseteq X$ abg, $A \cap B = \emptyset$. Sei $\lambda : X \to [0,1]$

eine Urysohnfunktion mit $\lambda|_A = 1$, $\lambda|_B = 0$.

Setze $\Phi(x) = \lambda(x) \cdot \Phi'(x) \Rightarrow \Phi|_A = \Phi|_A = \varphi$

und $|\Phi(x)| < 1$ für alle $x \in X$. $\square$

<u>Theorem</u> (<u>Tietzes Fortsetzungssatz</u>) Sei X ein T_1-Raum, sei $Z = \mathbb{R}$ oder $Z = [a,b]$ oder $Z = (a,b)$, für $a < b$.

Dann sind äquivalent:

(i) X ist normal

(ii) Für jede abg. Teilmenge $A \subseteq X$ und jedes stetige $\varphi: A \to Z$ gibt es $\Phi: X \to Z$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

<u>Beweis</u> <u>(ii) ⇒ (i):</u> Sei $u, v \in Z$ mit $u < v$.

Seien $A, B \subseteq X$ abg. mit $A \cap B = \emptyset$. Setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} u & \text{wenn } x \in A \\ v & \text{wenn } x \in B \end{cases} \Rightarrow \varphi: A \cup B \to [u,v] \text{ stetig.}$$

Sei Φ eine Fortsetzung. Setze $U = \{x \in X \mid \Phi(x) < \frac{1}{2}(u+v)\}$

$V = \{x \in X \mid \Phi(x) > \frac{1}{2}(u+v)\}$

$\Rightarrow U, V \subseteq X$ offen, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

<u>(ii) ⇒ (i):</u> Für $Z = [a,b]$ mit $a < b$ wähle

Homöomorphismus $\tau: [a,b] \to [-1,1]$, z.B.

$$\tau(t) = \frac{1}{b-a}(2t-a-b).$$

Dann hat $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$ eine Fortsetzung $\tilde{\Phi}$ $\underbrace{}_{\text{nach Lemma B}}$, setze

$$\Phi = \tau^{-1} \circ \tilde{\Phi}.$$

Für $Z=(a,b)$ betrachte $\tau:(a,b)\to(-1,1)$ genauso. Für $Z=\mathbb{R}$ wähle ein Homöomorphismus $\tau:\mathbb{R}\to(-1,1)$, vgl. §1.9. Der Rest genauso. $\square$

Bemerkung Ein T_1-Raum X heißt *vollständig regulär* oder *Tychonov-Raum* oder *$T_{3\frac{1}{2}}$-Raum*, wenn gilt: für jedes $u\in X$ und jede offene Menge $U\subseteq X$ mit $u\in U\subseteq X$ gibt es $\varphi: X\to[0,1]$ stetig mit $\varphi(u)=0$ und $\varphi(x)=1$ für alle $x\in X-U$.

Klar: $T_4\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}\Rightarrow T_3$. Ist $Y\subseteq X$ Teilraum, so ist auch Y ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

—

Jetzt kommen wir zu *Kompaktheit*.

9. *Def.* Sei X ein top. Raum. Eine Menge $\mathcal{C}$ von offenen Teilmengen von X heißt *offene Überdeckung*, wenn gilt $\bigcup\mathcal{C}=X$, d.h. wenn $X=\bigcup_{U\in\mathcal{C}}U$. Ein Hausdorffraum X heißt *kompakt*, wenn gilt: für *jede* offene Überdeckung $\mathcal{C}$ gibt es $\mathcal{C}_0\subseteq\mathcal{C}$ *endlich* mit $X=\bigcup\mathcal{C}_0$.

jede offene Überdeckung hat eine <u>endliche</u> Teilüberdeckung.

⌈ Achtung: manche (alte) Topologiebücher lassen die Hausdorff-Bedingung weg. ⌋

<u>Bsp</u> (a) X diskreter topologischer Raum,
$\mathcal{C} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ist offene Überdeckung. Also ist X genau dann kompakt, wenn X endlich ist.

(b) $\mathbb{R}$ mit üblicher Topologie, $\mathcal{C} = \{(-k,k) \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$
Ist $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich, so ist $\bigcup \mathcal{C}_0 \neq \mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines Hausdorffraums X heißt kompakt, wenn A in der Teilraumtopologie kompakt ist. Äquivalent dazu: ist $\mathcal{C}$ Menge von offenen Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$. Denn: die offenen Teilmengen von A in der Teilraumtopologie sind von der Form $A \cap U$, $U \subseteq X$ offen.

10. Satz Sei X ein Hausdorff-Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge.
(a) Falls A kompakt ist, so ist A abg. in X.
(b) Falls X kompakt ist, so ist A genau dann abg., wenn A kompakt ist.

Beweis (a). Sei $w \in X - A$. Für jedes $a \in A$ gibt es $U_a, V_a \subseteq X$ offen mit $w \in V_a$, $a \in U_a$, $U_a \cap V_a = \phi$.
Setze $\mathcal{C} = \{U_a \mid a \in A\}$. Dann ist $\bigcup \mathcal{C} \supseteq A$, also gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_0 = \{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$.
Dann ist $V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m} = W$ offen, $w \in W$, $W \cap A = \phi$.
Also ist A abg. in X. $\square$

(b) Sei X kp, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\mathcal{C}$ Menge von offenen Mengen in X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, sei $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{X - A\}$.
Dann ist $\bigcup \tilde{\mathcal{C}} = X$, also gibt es $\tilde{\mathcal{C}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ endlich mit $X = \bigcup \tilde{\mathcal{C}}_0$; setze $\mathcal{C}_0 = \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C} \Rightarrow A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$. $\square$
(Rest mit (a).)

11. Satz Seien X, Y Hausdorff-Räume und sei $f: X \to Y$ stetig. Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, so ist $f(A) = B \subseteq Y$ auch kompakt. Insbesondere ist $f(A)$ abgeschlossen.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ Menge von offenen Teilmengen von Y mit $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Sei $\tilde{\mathcal{C}} = \{ f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C}\}$.

Dann ist $\tilde{\mathcal{C}}$ Menge von offenen Teilmengen von X (weil f stetig ist) mit $A \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$. Also gibt es $\tilde{\mathcal{C}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \tilde{\mathcal{C}}_0$. Damit: $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \{ f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_m) \}$

$U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{C} \Rightarrow B \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_m$. $\square$

<u>Korollar</u> Seien X, Y Hausdorff-Räume, sei $f: X \to Y$ stetig und bijektiv. Wenn X kompakt ist, so ist f ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Sei $h: Y \to X$ die Umkehrabbildung von f, sei $A \subseteq X$ abg. Dann ist A kompakt, also ist $h^{-1}(A) = f(A) = B \subseteq Y$ kompakt, also abg in Y. Damit ist h stetig, also ist f ein Homöomorphism. $\square$

12. <u>Def</u> Eine Menge von Mengen $\mathcal{C}$ hat die <u>endliche Durchschnittseigenschaft</u> FIP (engl finite intersection property) wenn gilt: Für jede <u>endliche</u> Teilmenge $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ (mit $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$) ist $\bigcap \mathcal{C}_0 \neq \emptyset$. D.h. für alle $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{C}$ gibt es ein $z \in C_1 \cap \ldots \cap C_m$.

13. **Satz** Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist kompakt

(ii) für jede Menge von abg. Teilmengen $\mathcal{A} \neq \emptyset$ mit FIP ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Beweis Rein formal. Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ Menge von abg. Teilmengen, sei $\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Dann gilt:

$$\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset \iff \bigcup \mathcal{C} \neq X$$

$$\mathcal{A} \text{ FIP} \iff \text{für alle endlich } \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C} \text{ ist } \bigcup \mathcal{C}_0 \neq X$$

$\square$ #

14. **Theorem** (Satz von Tychonov) Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Hausdorffräumen, $J \neq \emptyset$, alle $X_j \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

(i) alle X_j sind kompakt

(ii) $\prod_{j \in J} X_j = X$ ist kompakt (in der Produkttopologie).

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) ist einfach: X kompakt $\Rightarrow$

$X_j = pr_j(X)$ ist auch kompakt nach §2.11.

Für die andere Richtung brauchen wir Zorns Lemma.

Erinnerung an Zorns Lemma Eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ heißt induktiv, wenn jede linear geordnete① Teilmenge $K \subseteq P$ eine obere Schranke hat.②

① $a, b \in K \Rightarrow a \leq b$ oder $b \leq a$

② es gibt $s \in P$ so, dass für alle $a \in K$ gilt $a \leq s$.

Zorns Lemma Ist $(P, \leq)$ induktiv, $P \neq \emptyset$, so gibt es in P mindestens ein maximales Element③ m.

③ Für kein $p \in P$ gilt $m < p$

Jetzt Beweis, dass (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge von abg. Teilmengen von X mit FIP. zZ ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sei $P = \{ \mathcal{E} \mid \mathcal{E}$ ist Menge von Teilmengen mit FIP, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \}$

Bezüglich Inklusion "$\subseteq$" ist $(P, \subseteq)$ partiell geordnet.

(a) Beh $(P, \subseteq)$ ist induktiv, hat also ein maximales Element.

Denn ist $K \subseteq P$ linear geordnet, so setze $\mathcal{K} = \bigcup K$.

Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Ist $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{K}$ so gibt es $\mathcal{E} \in K$ mit $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$ (weil K linear geordnet ist), also $E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{K} \in P$.

$\Rightarrow K$ hat obere Schranke. $\square$

Wir wählen jetzt ein maximales $\mathcal{E} \in P$.

(b) Beh Ist $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$, so ist $E_1 \cap \dots \cap E_m \in \mathcal{E}$.

Denn: $E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \dots \cap E_m\}$ hat FIP

$\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \dots \cap E_m\} \in P$. Aber $\mathcal{E}$ ist maximal. $\square$

Wir setzen für $j \in J$ $\mathcal{E}_j = \{ \overline{pr_j(E)} \mid E \in \mathcal{E} \}$.

Dann hat $\mathcal{E}_j$ FIP, also gibt es $z_j \in \bigcap \mathcal{E}_j \subseteq X_j$

(weil X_j kompakt). Sei $U_k \subseteq X_j$ eine Umgebung von z_j,

sei $W_k = \{ x \in X \mid pr_k(x) \in U_k \}$ sowie $z = (z_j)_{j \in J}$

(c) Beh Es gilt $W_k \in \mathcal{E}$.

Denn: für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt $E \cap W_k \neq \emptyset$,

[denn $z_k \in \overline{pr_k(E)}$, d.h. $U_k \cap pr_k(E) \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ es gibt $x \in E$ mit $pr_k(x) \in U_k \Rightarrow x \in W_k$.]

Ist also $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow \underbrace{E_1 \cap \dots \cap E_m}_{\in \mathcal{E}} \cap W_k \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{W_k\}$ hat FIP $\Rightarrow \mathcal{E} \cup \{W_k\} \in P$

$\Rightarrow W_k \in \mathcal{E}$ wegen Maximalität. $\square$

Wir wählen jetzt $z \in X$ so, dass für jedes $j \in J$ gilt $z_j = pr_j(z) \in \bigcap \mathcal{E}_j \subseteq X_j$

(d) Beh Für alle $E \in \mathcal{E}$ ist $z \in \overline{E}$.

Denn Sei $V \subseteq X$ eine Umgebung von z. Dann gibt es $J_0 \subseteq J$ endlich, $U_j \subseteq X_j$ offen mit $z_j \in U_j$ so, dass $W = \{x \in X \mid pr_j(x) \in U_j$ für alle $j \in J_0\} \subseteq W$.

Mit (b), (c) folgt $W = \bigcap_{k \in J_0} W_k \in \mathcal{E}$, insbesondere also $W \cap E \neq \emptyset$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Damit $z \in \overline{E}$ □

Für alle $A \in \mathcal{A}$ folgt also insbesondere $z \in \overline{A} = A$, d.h. $z \in \bigcap \mathcal{A}$. □

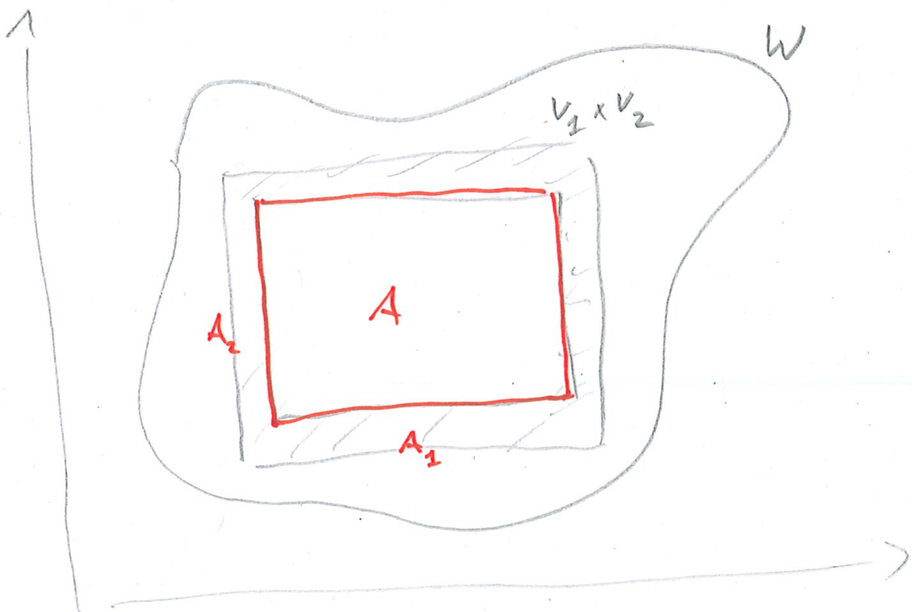
Korollar Die Cantormenge $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, ebenso der Hilbertwürfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und natürlich auch $[0,1]^m \subseteq \mathbb{R}^m$ für alle $m \geq 1$.

⌜A.N. Tychonov, sowj. Mathematiker, 1906–1993
Spezialfall: $[0,1]^I$ ist für jedes I kompakt. ⌟

15. Satz (Wallace' Lemma)

Seien $X_1, \dots, X_m$ Hausdorff-Räume, sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Für $j = 1, \dots, m$ sei $A_j \subseteq X_j$ kompakt. Sei $W \subseteq X$ offen mit $A = A_1 \times \dots \times A_m \subseteq W$. Dann gibt es $V_i \subseteq X_i$ offen mit $A_i \subseteq V_i$ und $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W$.

$m = 2$



Beweis Für $m = 1$ ist das klar.

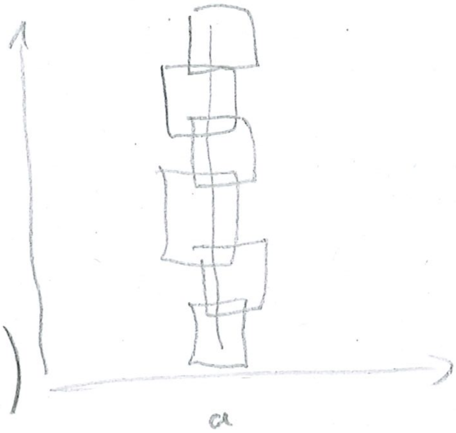
$m = 2$: Sei $a \in A_1$. Für jedes $b \in A_2$ gibt es offene Mengen $U_b \subseteq X_1$, $V_b \subseteq X_2$ mit

$$(a, b) \in U_b \times V_b \subseteq W.$$

Da $\{a\} \times A_2 \cong A_2$ kompakt ist, gibt es $b_1, \dots, b_s \in A_2$ mit $\{a\} \times A_2 \subseteq (U_{b_1} \times V_{b_1}) \cup \dots \cup (U_{b_s} \times V_{b_s})$

Setze $U_a = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_s}$, $V_a = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_s}$

$\leadsto$ $\{a\} \times A_2 \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$.



Weil $A_1 \times A_2$ kompakt ist, gibt es

$a_1, \dots, a_r \in A_1$ mit

$$A_1 \times A_2 \subseteq (U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \dots \cup (U_{a_r} \times V_{a_r})$$

Setze jetzt $V_1 = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_r}$ $\leadsto$ $V_1 \times V_2 \subseteq W$

$V_2 = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_r}$ $\quad A_1 \times A_2 \subseteq V_1 \times V_2$

□

$\underline{m \geq 3}$ $\quad X = X_1 \times \underbrace{X_2 \times \dots \times X_m}_{= Y}$ $\quad A = A_1 \times \underbrace{A_2 \times \dots \times A_m}_{= B}$

$\leadsto$ es gibt $V_1 \subseteq X_1$, $U \subseteq Y$ offen mit

$A \subseteq V_1 \times U \subseteq W$. Mit Induktion gibt es $V_2, \dots, V_m$

mit $A_2 \times \dots \times A_m \subseteq V_2 \times \dots \times V_m \subseteq U$

insgesamt $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq V_1 \times U \subseteq W$.

□

Korollar A Ist X ein Hausdorff-Raum und sind $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ kompakt, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so gibt es $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ offen mit $A_i \subseteq V_i$ und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Insbesondere ist jeder kompakte Raum normal.

Beweis Setze $Y = \underbrace{X \times \dots \times X}_{m} = X^m$, $A = A_1 \times \dots \times A_m \subseteq X^m$

$W = \{ (x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i \neq x_j$ für $i \neq j \}$. Dann ist $W \subseteq X^m$ offen (weil X Hausdorff-Raum ist) und $A \subseteq W$. (weil $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$). Also gibt es $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ offen mit $A \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W \Rightarrow$ $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$. $\square$

Korollar B Seien X, Y Hausdorffräume, sei Y kompakt. Wenn $A \subseteq X \times Y$ abg. ist, so ist auch $pr_1(A) \subseteq X$ abg.

Beweis Sei $U = X - pr_1(A)$, z.z.: $U \subseteq X$ ist offen. Für $u \in U$ ist $\underbrace{(\{u\} \times Y)}_{\text{kompakt}} \cap A = \emptyset$, also gibt es $V_1 \subseteq X$ offen mit $\{u\} \times Y \subseteq V_1 \times Y \subseteq (X \times Y) - A \Rightarrow V_1 \subseteq U$. $\square$