8. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Lara Beßmann

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

> **Definition:** Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $c\colon [0,1] \to X$ gibt mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Zeigen Sie:

(i) Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

(ii) Sei $Y = \{(t, \sin(1/t)) \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\overline{Y}$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(iii) Wenn $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und zusammenhängend ist, dann ist W wegzusammenhängend.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass Alexandrovs Halbgerade zusammenhängend und wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Skript lesen.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)
Seien X, Y, Z Hausdorffräume, seien $f\colon X \to Y$ und $q\colon X \to Z$ stetig und sei $h\colon Z \to Y$ eine Abbildung mit $h \circ q = f$. Zeigen Sie: Falls X kompakt und q surjektiv ist, dann ist h stetig.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Definiere

$$Q(p) = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ offen und abgeschlossen und } p \in A\}\,,$$
$$C(p) = \bigcup \{A \subseteq X \mid A \text{ zusammenhängend und } p \in A\}\,.$$

Zeigen Sie:

(i) $C(p) \subseteq Q(p)$.

(ii) Wenn X kompakt ist, dann gilt $C(p) = Q(p)$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass X kompakt ist, um eine kompakte Menge C zu erhalten, die disjunkt zu $Q(p)$ ist. Konstruieren Sie eine offene und abgeschlossene Menge W mit $C \cap W = \emptyset$, indem Sie für jedes $c \in C$ eine Menge W_c betrachten mit $p \in W_c$ und $c \notin W_c$. Folgern Sie, dass $Q(p)$ zusammenhängend ist.

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $f(x) = 1/2 \cdot (\sin(x) + 1)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt eine Abbildung $F\colon \beta\mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $F \circ \iota_{\mathbb{R}} = f$.

(ii) Für $t \in [0, 1]$ sei $C_t = F^{-1}(t)$. Dann gilt $C_t - \iota_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

(iii) Folgern Sie: $\#(\beta\mathbb{R} - \iota_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})) \geq \#[0, 1]$.

Abgabe bis: Freitag, den 31.5.2019, 8 Uhr.