7. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Lara Beßmann

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

> **Definition:** Ein Hausdorff-Raum heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Sei X ein folgenkompakter metrischer Raum und sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass für jedes $p \in X$ ein $U \in \mathcal{C}$ existiert mit $p \in B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X folgenkompakt ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Aufgaben 7.1 und 7.2.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

> **Definition:** Ein metrischer Raum X heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endliche viele $x_1, \ldots, x_m \in X$ gibt mit $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_m)$.

Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X vollständig und total beschränkt ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Aufgabe 7.3.

Abgabe bis: Donnerstag, den 23.5.2019, 8 Uhr.