4. Übungszettel zur Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Lara Beßmann

Aufgabe 4.1 (1+1+1+1 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{C}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup \mathcal{C}$. Wir nennen $U \subseteq X$ *$\mathcal{C}$-offen*, wenn für alle $A \in \mathcal{C}$ der Schnitt $U \cap A$ offen in A ist. Zeigen Sie:

(i) Die $\mathcal{C}$-offenen Mengen bilden eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ auf X.

(ii) $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ ist feiner als $\mathcal{T}$, das heißt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.

(iii) Die Topologien müssen nicht übereinstimmen.

(iv) Sei Y ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wenn $f|_A$ für jedes $A \in \mathcal{C}$ stetig ist, so ist f stetig bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.

Aufgabe 4.2 (2+2 Punkte)
Definition: Eine surjektive Abbildung $p : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt *Quotientenabbildung*, wenn jede Teilmenge $U \subseteq Y$ genau dann offen in Y ist, wenn $p^{-1}(U)$ offen in X ist.

(i) Seien X und Y topologische Räume und $p : X \to Y$ stetig. Sei $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, sodass $p \circ f = id_Y$. Zeigen Sie, dass p dann schon eine Quotientenabbildung ist.

(ii) Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ ein Teilraum. Eine *Retraktion von X auf A* ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Zeigen Sie, dass jede Retraktion eine Quotientenabbildung ist.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)
Definition: Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen schreiben lässt.
Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie: X ist genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

Aufgabe 4.4 (2+2 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum mit zwei Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$. Sei $f : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ die Identität. Zeigen Sie:

(i) f ist stetig genau dann, wenn $\mathcal{T}'$ feiner als $\mathcal{T}$ ist, das heißt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

(ii) f ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ gilt.

***-Aufgabe** (2+2 Punkte)
Seien X, Y metrische Räume und sei $C(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig } \}$. Sei Y beschränkt, das heißt es existiert ein $S \in \mathbb{R}$ mit $d_Y(y_1, y_2) \leq S$ für alle $y_1, y_2 \in Y$. Definiere $d_\infty : C(X, Y) \times C(X, Y) \to \mathbb{R}$ durch

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Zeigen Sie:

(i) d_∞ ist eine Metrik auf $C(X, Y)$.

(ii) Wenn Y vollständig ist, dann ist $C(X, Y)$ vollständig bezüglich d_∞.

Abgabe bis: Donnerstag, den 2.5.2019, 8 Uhr.