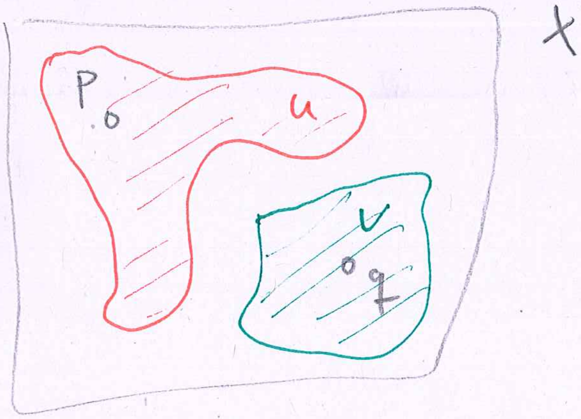
§2 Trennungsaxiome und Kompaktheit

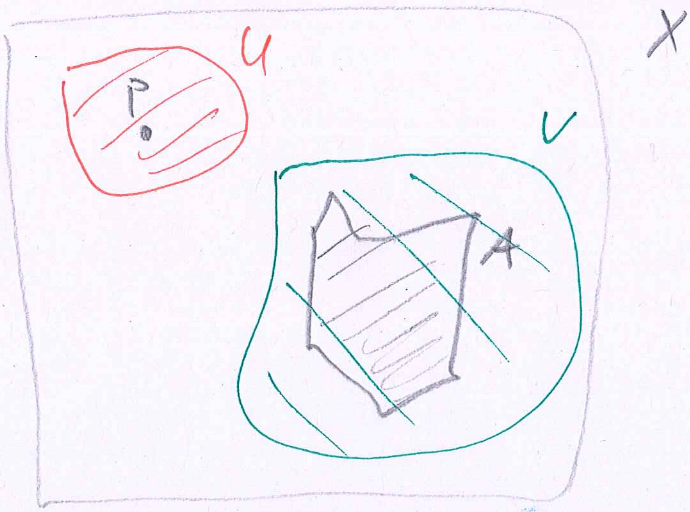
1. Def Sei X ein topologischer Raum.

(T_1) X heißt T_1-Raum, wenn für jedes $p \in X$ die Menge $\{p\} \subseteq X$ abg. ist.

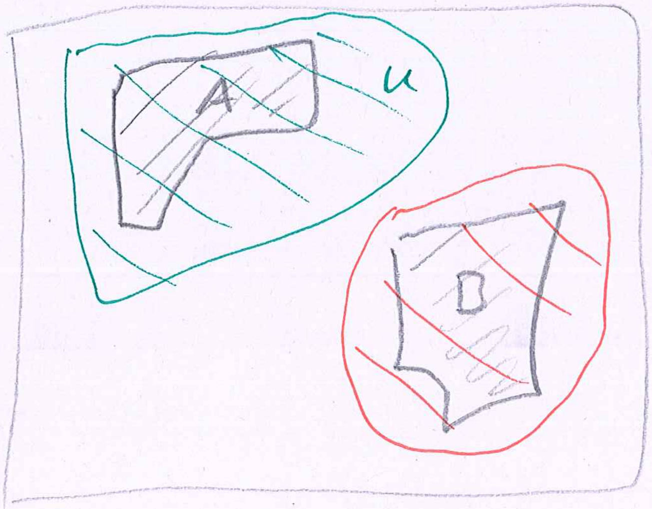
(T_2) X heißt Hausdorffraum oder T_2-Raum, wenn es für alle $p, q \in X$, $p \neq q$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$



(T_3) X heißt regulär oder T_3-Raum, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für jedes $p \in X$, $A \subseteq X$ abg., $p \notin A$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $p \in U$, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



(T_4) X heißt <u>normal</u> oder <u>T_4-Raum</u>, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn für alle abg. Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



Klar: $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$

$$\begin{array}{ccc} & \Downarrow & \swarrow \\ & T_1 & \end{array}$$

<u>Lemma</u> $T_2 \Rightarrow T_1$.

<u>Bew.</u> Sei $p \in X$. Zu jedem $q \in X$, $p \neq q$ gibt es $V_q \subseteq X$ offen mit $p \notin V_q$, $q \in V_q$.

Also ist $X - \{p\} = \bigcup \{ \underbrace{V_q}_{\text{offen}} \mid q \in X - \{p\} \}$ offen. $\square$

<u>Achtung</u>: Kelley definiert "regulär" und "normal" anders! Munkres und Dugundji wie hier.

Beispiel (a) Die Klumpentopologie auf $X = \mathbb{N}$ ist nicht T_1.

(b) Die kofinite Topologie auf $X = \mathbb{N}$ ist T_1, aber nicht T_2.

Denn $\emptyset \neq U, V \subseteq \mathbb{N}$ offen in $\mathcal{T}_{kof}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N} - U$ endlich, $\mathbb{N} - V$ endlich

$\Rightarrow U \cap V$ unendlich.

2. **Satz** Jeder metrische Raum ist normal.

Beweis Sei (X, d) metr. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt. Zu jedem $a \in A$ gibt es $\varepsilon_a > 0$ so, dass $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$, da $X - B$ offen ist und $a \in X - B$. Entsprechend gibt es zu jedem $b \in B$ ein $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{\varepsilon_b} \cap A = \emptyset$. Setze

$$U = \bigcup \{ B_{\varepsilon_a/2}(a) \mid a \in A \} \supseteq A$$

$$V = \bigcup \{ B_{\varepsilon_b/2}(b) \mid b \in B \} \supseteq B$$

Beh $U \cap V = \emptyset$. Denn wäre $z \in U \cap V$, so gäbe es $a \in A$, $b \in B$ mit $z \in B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap B_{\varepsilon_b/2}(b)$

$$\Rightarrow d(a,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \Rightarrow \varepsilon_a > d(a,b) \text{ oder } \varepsilon_b > d(a,b) \quad \lightning$$

$\square$

<u>Satz</u> Sei $(X,<)$ angeordnet. Dann ist die Ordnungstopologie hausdorffsch.

<u>Beweis</u> Sei $p,q \in X$, $p \neq q$. OE $p<q$.

<u>1. Fall</u>: es gibt $z \in X$ mit $p<z<q$. Dann $U=(-\infty,z)$ $V=(z,\infty)$ $\leadsto$ $p\in U$, $q \in V$, $U\cap V=\emptyset$

<u>2. Fall</u>: es gibt kein $z\in X$ mit $p<z<q$. Dann $U=(-\infty,q)$ $V=(p,\infty)$ $\leadsto$ $p\in U$, $q\in V$ $U\cap V=\emptyset$. $\square$

<u>Bem.</u> Die Ordnungstopologie ist sogar normal.

Die folgenden Umformulierungen von T_2 und T_3 sind nützlich.

3\. <u>Satz A</u> Sei X ein top. Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist hausdorffsch

(ii) $\Delta_X = \{(p,p)\in X\times X \mid p \in X\} \subseteq X\times X$ ist abgeschlossen.

<u>Beweis</u> Δ_X abg in $X\times X$ $\Leftrightarrow$ für $(p,q)\in X\times X$ mit $p\neq q$ gibt es $W\subseteq X\times X$ offen mit $(p,q)\in W$ und $W\cap\Delta_X=\emptyset$ $\Leftrightarrow$ es gibt $U,V\subseteq X$ offen mit $(p,q)\in U\times V$ und $(U\times V)\cap\Delta_X=\emptyset$ $\Leftrightarrow$ es gibt $U,V\subseteq X$ offen mit $p\in U$, $q\in V$ und $U\cap V=\emptyset$ $\square$

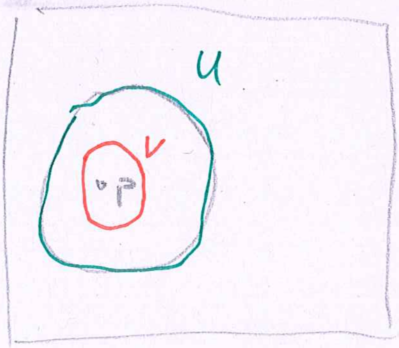
Satz B Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent: (i) X ist regulär

(ii) zu jedem $U \subseteq X$ offen und $p \in U$ gibt es $V \subseteq X$ offen mit $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Setze $A = X - U$. Dann gibt es $V, W \subseteq X$ offen mit $p \in V$, $A \subseteq W$, $V \cap W = \emptyset$

$\Rightarrow \overline{V} \subseteq X - W \subseteq X - A = U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $p \in X$, $A \subseteq X$ abg., $p \notin A$. Setze $U = X - A$, $W = X - \overline{V} \Rightarrow W$ offen, $A \subseteq W$, $p \in V$, $W \cap V = \emptyset$. $\square$



4. **Satz** Sei X ein T_m-Raum, $m = 1,2,3$. Sei $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist Y in der Teilraumtopologie wieder T_m-Raum.

Beweis $m=1$ Sei $p \in Y \subseteq X$. Dann ist $\overline{\{p\}} = \{p\} = \overline{\{p\}} \cap Y$, also ist $\{p\} \subseteq Y$ abg. in der Teilraumtopologie $\Rightarrow Y$ ist T_1-Raum.

<u>Fall $m=3$</u> Angenommen, $A \subseteq Y$ ist abg. in Y und $p \in Y$, $p \notin A$. Dann ist $\bar{A} \cap Y = A$, also $p \notin \bar{A}$

$\Rightarrow$ es gibt $U, V \subseteq X$ offen, $p \in U$, $\bar{A} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow$ $p \in U \cap Y$ offen in Y $\qquad (U\cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$

$A \subseteq V \cap Y$ offen in Y

<u>Fall $m=2$</u> Genauso mit $A = \{q\}$. $\square$

<u>Bem</u> Unterräume von normalen Räumen sind nicht notwendig normal. Beispiele sind aber kompliziert.

Wir betrachten jetzt Produkte.

5. <u>Lemma</u> Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine nichtleere Familie ($J \neq \emptyset$) von nichtleeren top. Räumen (alle $X_j \neq \emptyset$). Dann ist jedes X_k homöomorph zu einem abg. Teilraum von $X = \prod_{j\in J} X_j$ (in der Produkttopologie).

<u>Beweis</u> Sei $k \in J$. Für jedes $j \in J$ wähle $p_j \in X_j$.

Setze $f_j : X_k \to X_j \qquad f_j(q) = \begin{cases} q & \text{wenn } j=k \\ p_j & \text{wenn } j \neq k \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $f: X_k \to X$ stetig, vgl §1.16.

$$f(q) = (q_j)_{j\in J} \qquad q_j = \begin{cases} p_j & \text{wenn } j \neq k \\ q & \text{wenn } j = k \end{cases}$$

$pr_k \circ F = id_{X_k}$ $\Rightarrow$ f ist injektiv. Setze $Z = f(X_k)$

Dann ist $pr_k|_Z : Z \to X_k$ bijektiv und stetig

$\Rightarrow$ die Korestriktion $F|^Z : X_k \to Z \subseteq X$ ist ein Homöomorphismus. $\square$

6. __Satz__ Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine nicht leere Familie nicht leerer top. Räume, sei $X = \prod_{j\in J} X_j$. Sei $m \in \{1,2,3\}$.

Dann sind äquivalent:

(i) jedes X_j ist T_m-Raum

(ii) X ist T_m-Raum (in der Produkttopologie).

__Bew.__ (ii) $\Rightarrow$ (i) mit § 2.4 und dem vorigen Lemma.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

__$m=1$__: $p \in X$, $p = (p_j)_{j\in J}$. Setze $W_j = (X_j - \{p_j\}) \times \prod_{i\neq j} X_i$ $\Rightarrow$ $W_j \subseteq X$ offen, $X - \{p\} = \bigcup_{j\in J} W_j$ offen.

__$m=3$__: $p = (p_j)_{j\in J} \in X$, $U \subseteq X$ offen mit $p \in U$.

Es gibt $J_0 \subseteq J$ endlich mit $p \in W = \prod_{j\in J} W_j \subseteq U$,

$W_j = X_j$ wenn $j \in J - J_0$

$W_j \subseteq X_j$ offen wenn $j \in J_0$

Für jedes $j \in J_0$ wähle $V \subseteq X_j$ offen mit

$p_j \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq W_j$. Setze $V_j = X_j$ für $j \in J - J_0$.

Dann gilt $p \in V = \underbrace{\prod_{j \in J} V_j}_{\text{offen}} \subseteq \prod_{j \in J} \overline{V_j} \subseteq W \subseteq U$.

Nun gilt allgemein: ist $A_j \subseteq X_j$ abg, so ist

$\prod_{j \in J} A_j \subseteq X$ abg (!) denn:

$$\prod_{j \in J} A_j = \bigcap \Big\{ \underbrace{A_j \times \prod_{i \neq j} X_i}_{\text{abg in } X} \;\Big|\; j \in J \Big\}.$$

Also $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \prod_{j \in J} \overline{V_j} \subseteq U$.

Der Fall $n = 2$ geht ähnlich. $\square$

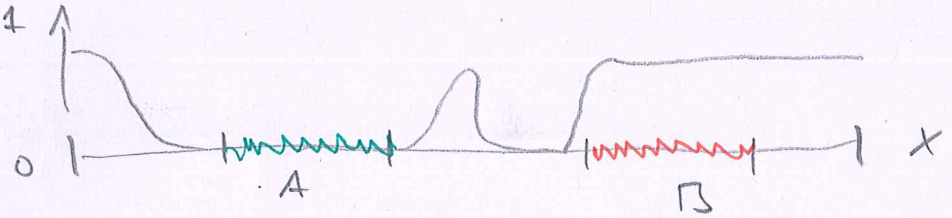
<u>Bem</u> Produkt von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal! ZB: $X = \mathbb{R}$ mit Sorgenfrey-Topologie (Basis $\{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$)

$\Rightarrow X$ normal, $X \times X$ nicht normal.

Oder: J überabzählbare Menge $\Rightarrow \mathbb{R}^J = \prod_{j \in J} \mathbb{R}$ nicht normal, aber $\mathbb{R}$ ist normal.

Normale (= T_4) Räume sind wichtig, weil es auf ihnen viele stetige reelle Funktionen gibt.

7. <u>Def</u> Sei X ein top. Raum und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to [0,1]$ heißt <u>Urysohn-Funktion</u> für (A,B), wenn für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$



<u>Theorem</u> (Urysohns Lemma) Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist normal

(ii) für alle $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B$ existiert eine Urysohn-Funktion φ für (A,B).

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar: setze $U = \varphi^{-1}(\underbrace{[0,\tfrac{1}{2})}_{\text{offen in } [0,1]})$

$V = \varphi^{-1}(\underbrace{(\tfrac{1}{2}, 1]}_{\text{offen in } [0,1]})$

(i) => (ii) Sei $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt. Sei $U, V \subseteq X$ offen und disjunkt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

Setze $U_0 = U$, $U_1 = X - B$, $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Sei $l: \mathbb{N} \to S$ eine Bijektion (S ist abzählbar) mit $l_0 = 0$, $l_1 = 1$. Wir definieren rekursiv offene Mengen U_s für $s \in S$ so, dass gilt

$$\circledast \qquad s < t \Rightarrow U_s \subseteq \overline{U}_s \subseteq U_t$$

Angenommen, U_s ist schon definiert für $s = l_0, l_1, \dots, l_r$.

Schreibe $\{l_0, \dots, l_r\} = \{s_1 < \dots < s_r\}$

$\leadsto$ es gibt j mit $s_j < l_{r+1} < s_{j+1}$ und

$U_{s_j} \subseteq \overline{U}_{s_j} \subseteq U_{s_{j+1}}$. Da X normal ist, gibt es

$W, V \subseteq X$ offen mit $\overline{U}_{s_j} \subseteq V$ $X - U_{s_{j+1}} \subseteq W$,

$$\left.\begin{array}{l} V \cap W = \emptyset \\ \overline{V} \subseteq X - W \end{array}\right\} \leadsto \overline{V} \subseteq U_{s_{j+1}}.$$ Setze

$$U_{l_{r+1}} = V.$$

Damit erfüllen wir $\circledast$.

Für $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ setze $U_q = \emptyset$
$q > 1$ setze $U_q = X$

Für $x \in X$ sei $Q(p) = \{ s \in \mathbb{Q} \mid p \in U_s \}$ sowie

$\varphi(p) = \inf Q(p)$. Es folgt $\varphi(X) \subseteq [0,1]$ und

$a \in A \Rightarrow \varphi(a) = 0$
$b \in B \Rightarrow \varphi(b) = 1$

__Beh__ __φ ist stetig.__

Für $x \in \overline{U_s} \Rightarrow \varphi(x) \leq s$
$x \in X - U_s \Rightarrow \varphi(x) \geq s$

Sei nun $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass $\varphi^{-1}((a,b)) \subseteq X$ offen ist. Für $x \in X$ mit $\varphi(x) \in (a,b)$ wähle $s,t \in \mathbb{Q}$ mit $a < s < \varphi(x) < t < b$

__Beh__: $W = U_t - \overline{U_s}$ ist offene Umgebung von x mit $\varphi(W) \subseteq (a,b)$.

__Denn:__
$$\left.\begin{array}{lll} z \in X - U_t & \Rightarrow & \varphi(z) \geq t \\ z \in \overline{U_s} & \Rightarrow & \varphi(z) \leq s \end{array}\right\} \Rightarrow x \in W$$

Ist $z \in W \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z \in U_t \subseteq \overline{U_t} \Rightarrow \varphi(z) \leq t \\ z \notin U_s \Rightarrow \varphi(z) \geq s \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(z) \in (a,b).$

$\square$ #

Mit Urysohns Lemma zeigen wir Tietzes Fortsetzungssatz.

8. <u>Lemma A</u> Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi: A \to [-c, c]$ stetig, $c > 0$.
Dann gibt es $\psi: X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ stetig mit

$$|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c \quad \text{für alle } a \in A.$$

<u>Beweis</u> Sei $A_+ = \{a \in A \mid \varphi(a) \geq \frac{1}{3} c\}$

$A_- = \{a \in A \mid \varphi(a) \leq \frac{1}{3} c\}$

Nach Urysohns Lemma §2.7. gibt es
$\lambda: X \to [0,1]$ mit $\lambda|_{A_-} = 0$, $\lambda|_{A_+} = 1$. Setze
$\psi(p) = 2 \cdot (\lambda(p) - \frac{1}{2}) \cdot \frac{c}{3} \Rightarrow \psi|_{A_+} = \frac{c}{3}$, $\psi|_{A_-} = -\frac{c}{3}$
$\psi(x) \in [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$

$a \in A_+ \Rightarrow |\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$

$a \in A_- \Rightarrow |\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$

Für $-\frac{1}{3} c < \varphi(a) < \frac{1}{3} c$ ist $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} c$. $\square$

<u>Lemma B</u> Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abg., sei $\varphi: A \to [-1, 1]$ stetig. Dann gibt es $\Phi: X \to [-1, 1]$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

Bew.: Nach Lemma A gibt es $\psi_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ stetig mit $|\varphi(a) - \psi_0(a)| \le \frac{2}{3}$ für alle $a \in A$.

Wieder mit Lemma A gibt es $\psi_1 : X \to \mathbb{R}$ stetig,

$$|\psi_1(p)| \le \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \quad |\underbrace{\varphi(a) - \psi_0(a)} - \psi_1(a)| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{usw}$$

$$\leadsto \psi_n : X \to \mathbb{R}, \quad |\psi_n(p)| \le \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$|\varphi(a) - \psi_0(a) - \ldots - \psi_n(a)| \le \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Setze $\Phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(p) \Rightarrow |\Phi(p)| \le \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \leadsto \Phi(X) \subseteq [-1, 1]$. Weiter gilt $\Phi(a) = \varphi(a)$ für alle $a \in A$. Warum ist Φ stetig?

Sei $p \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \ge 0$ so, dass $\frac{1}{3} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei V eine Umgebung von p so, dass für alle $q \in V$ gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{m} (\psi_n(p) - \psi_n(q)) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}. \quad \text{Es folgt}$$

$$|\Phi(p) - \Phi(q)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{für } q \in V$$

$\Rightarrow \Phi$ ist stetig.

<u>Lemma C</u> Sei X ein T_4-Raum, $A \subseteq X$ abg., $\varphi: A \to (-1,1)$ stetig. Dann gibt es $\Phi: X \to (-1,1)$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

<u>Beweis</u> Nach Lemma B gibt es jedenfalls $\Phi': X \to [-1,1]$ stetig mit $\Phi'|_A = \varphi$. Sei $B = \{p \in X \mid \Phi'(p) = \pm 1\}$. Dann ist $B \subseteq X$ abg., $A \cap B = \emptyset$, also gibt es eine Urysohn-Funktion $\lambda: X \longrightarrow [0,1]$ mit $\lambda|_A = 1$, $\lambda|_B = 0$. Setze $\Phi(p) = \lambda(p) \cdot \Phi'(p) \Rightarrow \Phi|_A = \Phi'|_A = \varphi$ und $\Phi(X) \subseteq (-1,1)$ $\square$

<u>Theorem</u> (Tietzes Fortsetzungssatz) Sei X ein T_1-Raum, sei $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ oder $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ oder $I = \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) X ist T_4-Raum

(ii) Ist $A \subseteq X$ abg. und ist $\varphi: A \to I$ stetig, so gibt es $\Phi: X \to I$ stetig mit $\Phi|_A = \varphi$.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $A, B \subseteq X$ disjunkt und abg. Wähle $u, v \in I$ mit $u < v$. Setze

$$\varphi(p) = \begin{cases} u & \text{wenn } p \in A \\ v & \text{wenn } p \in B \end{cases} \Rightarrow \varphi : A \cup B \to I \text{ stetig.}$$

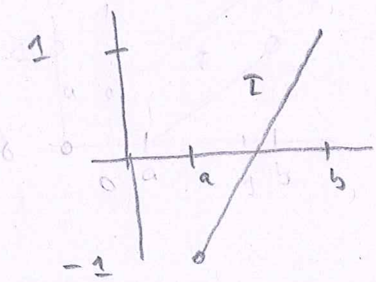
Sei $\Phi : X \to I$ eine stetige Fortsetzung von φ. Setze

$$\left.\begin{array}{l} U = \{ p \mid \Phi(p) < \tfrac{1}{2}(u+v) \} \\ V = \{ p \mid \Phi(p) > \tfrac{1}{2}(u+v) \} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} U \cap V = \emptyset \\ U, V \text{ offen} \end{array}$$

$A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $I = [a,b]$

Wähle Homöomorphismus $\tau : [a,b] \to [-1,1]$



Dann hat $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$ nach Lemma B Fortsetzung $\tilde{\Phi}$, setze

$\Phi = \tau^{-1} \circ \tilde{\Phi}$

$I = (a,b)$ Wähle Homöomorphismus $\tau : (a,b) \to (-1,1)$

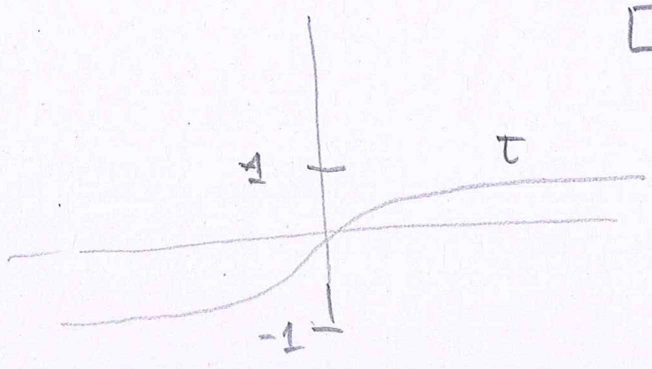
Wende Lemma C an auf $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$, $\tilde{\Phi}$ Fortsetzung,

$\Phi = \tau^{-1} \circ \tilde{\Phi}$

$I = \mathbb{R}$ Wähle Homöomorphismus $\tau : \mathbb{R} \to (-1,1)$

$\square$

usw.



9. **Def** Sei X ein top. Raum. Eine Menge $\mathcal{C}$ von offenen Teilmengen heißt <u>offene Überdeckung von X</u>, wenn gilt $\bigcup \mathcal{C} = X$.

Ein Hausdorffraum X heißt <u>kompakt</u>, wenn gilt: Für jede offene Überdeckung $\mathcal{C}$ von X gibt es eine <u>endliche</u> Teilmenge $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ mit $\bigcup \mathcal{C}_0 = X$, jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

⌜ Achtung: ältere Topologiebücher lassen manchmal die Hausdorff-Bedingung weg. ⌟

<u>Bsp</u> (a) X diskreter Raum

$$\mathcal{C} = \{\{p\} \mid p \in X\}$$ ist offene Überdeckung

also X kompakt $\Rightarrow$ X <u>endlich</u> ($\Leftarrow$ gilt auch)

(b) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{(-k,k) \mid k > 0\}$ ist offene Überdeckung. Ist $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich, so ist

$\bigcup \mathcal{C}_0 = (-k,k) \neq \mathbb{R}$ für ein $k > 0$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

(c) Alexandrovs Halbgerade L ist nicht kompakt:

Setze $\mathcal{C} = \{ \{p \in L \mid p < (\alpha, 0)\} \mid \alpha \in \omega_1 \}$

$\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich $\Rightarrow \bigcup \mathcal{C}_0 = \{p \in L \mid p < (\alpha, 0)\} \neq L$

für ein $\alpha \in \omega_1$

$\Rightarrow L$ ist <u>nicht</u> kompakt.

Sei X ein Hausdorffraum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>kompakt</u>, wenn A in der Teilraumtopologie kompakt ist. Äquivalent dazu: ist $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$. #

10. <u>Satz</u> Sei X ein Hausdorffraum, sei $A \subseteq X$.

(i) Wenn A kompakt ist, dann ist A abgeschlossen

(ii) Wenn X kompakt ist und wenn A abgeschlossen ist, dann ist A kompakt.

<u>Beweis</u> (i) Sei $p \in X - A$. Zu jedem $a \in A$ gibt es offene Mengen $U_a, V_a \subseteq X$ mit $a \in U_a$, $p \in V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$ (weil X Hausdorff)

Setz $\mathcal{C} = \{ U_a \mid a \in A \}$. Es folgt

$A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, also gibt es $a_1, \dots, a_m \in A$ mit

$A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$, da A kompakt ist. Dann

ist $V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m} = V$ offen, $p \in V$ und $V \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow X - A$ offen.

(ii) Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Mengen mit

$A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, sei $W = X - A$. Dann ist

$\mathcal{C} \cup \{W\}$ eine offene Überdeckung von X. Also

gibt es $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ endlich mit

$$X = W \cup \bigcup \mathcal{C}_0 \Rightarrow A \subseteq W \cup \bigcup \mathcal{C}_0 \Rightarrow A \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$$

weil $W = X - A$. $\square$

11. <u>Theorem</u> Jeder kompakte Raum X ist T_4.

<u>Beweis</u> In zwei Schritten.

(1) <u>X ist T_3-Raum.</u>

Sei $A \subseteq X$ abg., $p \in X - A$. Zu jedem $a \in A$

gibt es offene Mengen $U_a, V_a \subseteq X$ mit

$p \in V_a$, $a \in U_a$, $V_a \cap U_a = \emptyset$ (T_2)

Dann ist $A \subseteq \bigcup \{ U_a \mid a \in A \}$

$\Rightarrow A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$ für geeignete

$a_1, \dots, a_m \in A$.

Setze $U = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_m}$ $V = V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_m}$

$\Rightarrow$ U, V offen, $p \in V$, $A \subseteq U$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

(2) X ist T_4-Raum.

Seien $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt. Für jedes $a \in A$ gibt es $U_a, V_a \subseteq X$ offen und disjunkt mit $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$. Da A kompakt ist, gibt es $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $A \subseteq U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n} = U$.

Setze $V = V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n} \Rightarrow B \subseteq V$ offen, $U \cap V = \emptyset$.

$\square$

12. Satz Seien X, Y Hausdorff-Räume, sei $f: X \to Y$ stetig. Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, dann ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt und insbesondere abgeschlossen.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Teilmengen von Y mit $f(A) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Sei $\mathcal{B} = \{ f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C} \}$.

Dann ist $\mathcal{B}$ eine offene Überdeckung von A.

Also gibt es $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{B}$ mit

$A \subseteq f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_m)$. Es folgt

$f(A) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_m \Rightarrow f(A)$ ist kompakt. $\square$

<u>Korollar</u> Seien X, Y Hausdorffräume, sei $f: X \to Y$ stetig und bijektiv. Wenn X kompakt ist, dann ist f ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Sei $h: Y \to X$ die Umkehrabbildung von f. Sei $A \subseteq X$ abg. Dann ist $h^{-1}(A) = f(A)$ kompakt, also abg. in Y. Damit ist h nach §1.9 Satz A stetig. $\square$

13. <u>Def</u> Eine Menge von Mengen $\mathcal{E}$ hat die <u>endliche Durchschnittseigenschaft</u> (EDE), wenn für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ gilt $\bigcap \mathcal{E}_0 \neq \emptyset$ (d.h.: $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap \ldots \cap E_m \neq \emptyset$).

<u>Bsp</u> $\mathcal{E} = \{ [k, \infty) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ hat (EDE), aber $\bigcap \mathcal{E} = \emptyset$.

<u>Satz</u> Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent: (i) X ist kompakt

(ii) ist $\mathcal{A}$ eine Menge von abg. Teilmengen von X mit (EDE), so ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> Rein formal. Setze $\mathcal{U} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}$ hat (EDE) $\Leftrightarrow$ für jede <u>endliche</u> Teilmenge $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ ist $\bigcup \mathcal{U}_0 \neq X$

$\bigcap \mathcal{A} \neq \phi \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup \mathcal{U} \neq X$ $\square$

14. <u>Theorem</u> (Satz von Tychonov) Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine nicht leere Familie von nicht leeren Hausdorff-Räumen. Dann sind äquivalent:

(i) $X = \prod_{j \in J} X_j$ ist kompakt.

(ii) jeder Raum X_j ist kompakt.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): X kompakt $\Rightarrow$ $pr_k(X) = X_k$ kompakt nach §2.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i) mit Zorns Lemma. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von abg. Teilmengen von X mit (EDE). Zu zeigen: $\bigcap \mathcal{A} \neq \phi$. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ und mit (EDE). Es folgt $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$. Bezüglich "$\subseteq$" ist $\mathcal{P}$ partiell geordnet.

(a) <u>Beh</u> $(P, \subseteq)$ hat maximale Elemente.

<u>Denn:</u> Ist $K \subseteq P$ linear geordnete Teilmenge, so setze $\mathcal{K} = \bigcup K$. Für $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{K}$ gibt es $\mathcal{E} \in K$ mit $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset$ $\Rightarrow \mathcal{K} \in P$ ist obere Schranke von K. Nach Zorns Lemma gibt es in P maximale Elemente $\square$

(b) Sei nun $\mathcal{E} \in P$ ein maximales Element.

<u>Beh</u> $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap \dots \cap E_m \in \mathcal{E}$.

<u>Denn</u> $\mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \dots \cap E_m\}$ hat (EDE) und $\mathcal{E}$ ist maximal bzgl. "$\subseteq$" $\Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \dots \cap E_m\}$ $\square$

(c) Für $j \in J$ sei $\mathcal{E}_j = \{ \overline{pr_j(E)} \mid E \in \mathcal{E} \}$.

Dann hat $\mathcal{E}_j$ (EDE), folglich existiert ein $p_j \in \bigcap \mathcal{E}_j$. Setze $p = (p_j)_{j \in J}$.

Sei $U_k \subseteq X_k$ eine Umgebung von p_k.

(d) <u>Beh</u> $U_k \times \prod_{j \neq k} X_j \in \mathcal{E}$.

<u>Denn:</u> Für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt

$$E \cap \left(U_k \times \prod_{j \neq k} X_j \right) \neq \emptyset$$

Mit (b) folgt: Für $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$ ist $E_1 \cap \dots \cap E_m \cap \left(U_k \times \prod_{j \neq k} X_j\right) \neq \emptyset$. Wegen der Maximalität von $\mathcal{E}$ ist $U_k \times \prod_{j \neq k} X_j \in \mathcal{E}$. $\square$

(e) <u>Beh</u> Für alle $E \in \mathcal{E}$ ist $p \in \overline{E}$.

<u>Denn</u>: Ist $J_0 \subseteq J$ endlich, U_j Umgebung von p_j für $j \in J_0$, so folgt

$$\underbrace{\prod_{j \in J_0} U_j \times \prod_{j \in J - J_0} X_j}_{\text{Umgebung von } p} = \bigcap_{k \in J_0} \left(U_k \times \prod_{j \neq k} X_j\right) \overset{(b)}{\in} \mathcal{E}$$

Da $\mathcal{E}$ (EDE) hat, folgt für $E \in \mathcal{E}$, dass jede Umgebung von p die Menge E nicht trivial schneidet. Es folgt $p \in \overline{E}$ (sonst wäre $X - \overline{E}$ eine Umgebung von p, die E trivial schneidet).

(f) Für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt wegen $E = \overline{E}$, dass $p \in E$, also $p \in \bigcap \mathcal{A}$. $\square$

#

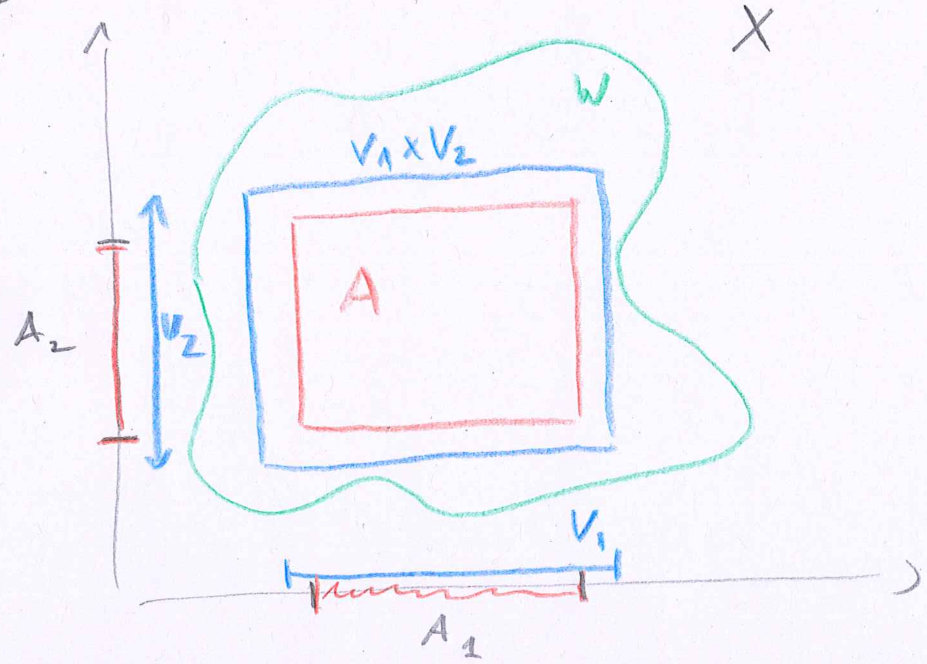
Korollar Die Cantormenge $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller 0-1-Folgen ist kompakt. Hilberts Würfel $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ist kompakt, genauso wie der n-dimensionale Würfel $\underbrace{[0,1] \times \dots \times [0,1]}_{n \text{ Faktoren}} = [0,1]^n$

15. **Satz** (Wallace' Lemma)

Seien $X_1, \dots, X_m$ Hausdorffräume, sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Für jedes $j = 1, \dots, m$ sei $A_j \subseteq X_j$ kompakt. Sei $W \subseteq X$ offen mit $A = A_1 \times \dots \times A_m \subseteq W$. Dann gibt es offene Mengen $V_1, \dots, V_m$ mit $A_j \subseteq V_j \subseteq X_j$ und mit

$$A \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W \subseteq X.$$

$m = 2$



<u>Bew.</u> Für $m=1$ ist nichts zu tun

<u>$m=2$:</u> Sei $a \in A_1$. Für jedes $b \in A_2$ gibt es offene Mengen $U_b \subseteq X_1$, $V_b \subseteq X_2$ mit

$$(a,b) \in U_b \times V_b \subseteq W.$$

Da $\{a\} \times A_2 \cong A_2$ kompakt ist, gibt es $b_1, \dots, b_r \in A_2$ mit $\{a\} \times A_2 \subseteq (U_{b_1} \times V_{b_1}) \cup \dots \cup (U_{b_r} \times V_{b_r})$. Setze

$U_a = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_r}$ $\quad V_a = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_r}$ $\Rightarrow$

$\{a\} \times A_2 \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$. Da $A_1 \times A_2$ kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_s \in A_1$ mit

$$A_1 \times A_2 \subseteq (U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \dots \cup (U_{a_s} \times V_{a_s}) \subseteq W$$

Setze $V_1 = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_s}$ $\quad V_2 = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_s}$

$\Rightarrow A_1 \times A_2 \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq W$ $\square$

Jetzt weiter mit Induktion: $X = X_1 \times \underbrace{\prod_{k=2}^{m} X_k}_{=Y}$

$A = A_1 \times \underbrace{\prod_{k=2}^{m} A_k}_{=B}$ $\quad A \subseteq W \subseteq X \Rightarrow$ es gibt V_1, U

offen $V_1 \subseteq X_1$, $U \subseteq Y$ mit

$A \subseteq V_1 \times U \subseteq W$. Nach Induktionsannahme gibt es

$V_2, \dots, V_m$ offen mit

$$A_2 \times \dots \times A_m \subseteq V_2 \times \dots \times V_m \subseteq U$$

$\Rightarrow A \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W$ $\square$

<u>Korollar</u> Ist X ein Hausdorffraum und sind $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ kompakte paarweise disjunkte Mengen, so gibt es offene paarweise disjunkte Mengen $V_1, \dots, V_m \subseteq X$ mit $A_j \subseteq V_j$.

Insbesondere ist jeder kompakte Raum ein T_4-Raum.

<u>Beweis</u> Setze $Y = \underbrace{X_1 \times \dots \times X}_{m\text{-fach}}$, $A = A_1 \times \dots \times A_m$

$W = \{ (x_1, \dots, x_m) \in Y \mid x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j \}$ offen in Y

$A \subseteq W \Rightarrow$ es gibt $V_1, \dots, V_m$ offen, $A_j \subseteq V_j$ mit

$A \subseteq V_1 \times \dots \times V_m \subseteq W$. $\square$

16. <u>Def</u> Ein T_1-Raum X heißt <u>Tychonov-Raum</u> oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn gilt: ist $p \in X$, $A \subseteq X$ abg., $p \notin A$, so gibt es $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $\varphi(p) = 1$, $\varphi|_A = 0$.

<u>Klar</u>: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

<u>Auch klar</u>: X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, $Y \subseteq X$ beliebig $\Rightarrow Y$ ist auch $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

<u>Sowie</u> X kompakt, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ ist $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum

T_4-Raum!

17. <u>Konstruktion</u> Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, sei $S = C(X,[0,1]) = \{\varphi : X \to [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}$. Betrachte die Abbildung

$$\iota_X : X \longrightarrow [0,1]^S$$
$$p \longmapsto (\varphi(p))_{\varphi \in S}.$$

<u>Lemma</u> Die Abbildung ι_X ist stetig, injektiv und die Koeinschränkung

$$\iota_X : X \longrightarrow \iota_X(X)$$

ist ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Für $\varphi \in S$ ist $pr_\varphi \circ \iota_X(p) = \varphi(p)$ stetig $\Rightarrow \iota_X$ ist stetig. Ist $p \neq q$, so gibt es $\varphi \in S$ mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, weil X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist. Also ist $\iota_X(p) \neq \iota_X(q)$.

Sei $A \subseteq X$ abg. <u>Beh</u>: $\overline{\iota_X(A)} \cap \iota_X(X) = A$ d.h. $\iota_X(A)$ ist abg. in $\iota_X(X)$.

Sei $p \in X - A$. Dann gibt es $\varphi \in S$ mit $\varphi(p) = 1$, $\varphi(A) \subseteq \{0\}$

$$\Rightarrow pr_\varphi(\iota_X(A)) \subseteq \{0\}$$
$$\Rightarrow pr_\varphi(\overline{\iota_X(A)}) \subseteq \{0\}$$

$\Rightarrow \quad \iota_X(p) \notin \overline{\iota_X(A)}$ □

Da $[0,1]^S$ kompakt ist, folgt:

Korollar Ein top. Raum X ist genau dann ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn X homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raums ist. □

18. Def Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, sei $S = C(X,[0,1])$, $\iota_X : X \to [0,1]^S$, $p \mapsto (\varphi(p))_{\varphi\in S}$.
Wir setzen $\beta X = \overline{\iota_X(X)} \subseteq [0,1]^S$. Dann ist βX kompakt, weil abg. in dem kompakten Raum $[0,1]^S$. Man nennt

$$\iota_X : X \longrightarrow \beta X$$

die Čech-Stone Kompaktifizierung von X.

Der Raum βX ist oft riesengroß, z.B. $X = \mathbb{N}$ mit diskreter Topologie

$$\# \underbrace{\beta\mathbb{N}}_{} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

$\hookrightarrow$ $\beta\mathbb{N} \hat{=}$ Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.

<u>Satz</u> Sei $f: X \to Y$ stetig, X, Y $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume.

Dann gibt es genau eine stetige Abbildung

$$\beta f: \beta X \to \beta Y$$

so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\
Y \arrow[r, "\iota_Y"] & \beta Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Beweis</u> <u>Eindeutigkeit</u>. Angenommen, $h \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$.

Da $A = \{ q \in \beta X \mid h(q) = \beta f(q) \}$ abg. ist und ι_X enthält, folgt $A \supseteq \overline{\iota_X(X)} = \beta X$. Also ist $h = \beta f$.

<u>Existenz</u> Sei $S = C(X, [0,1])$
$T = C(Y, [0,1])$

Für jedes $\psi \in T$ ist $\varphi = \psi \circ f \in S$, betrachte

$$pr_{\psi\circ f} : [0,1]^S \to [0,1] \qquad (t_\varphi)_{\varphi \in S} \mapsto t_{\psi \circ f}$$

Damit erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\alpha : [0,1]^S \to [0,1]^T$$
$$(t_\varphi)_{\varphi \in S} \mapsto (t_{\psi\circ f})_{\psi \in T}$$

Einschränkung auf $\beta X \subseteq [0,1]^S$ ergibt

$$(\varphi(p))_{\varphi\in S} \longmapsto (\psi(f(p)))_{\psi\in T} \in \beta Y$$

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha|^{\beta Y}_{\beta X}"'] & {[0,1]^S} \arrow[d, "\alpha"] \\
\beta Y \arrow[r] & {[0,1]^T}
\end{tikzcd}$$

$\square$