Übungen zur Atom- und Quantenphysik: Blatt 9 SS 2017 Prof. Rohlfing
Abgabe: Donnerstag, 22.06.2017, Besprechung: 27./28.06.2017

Aufgabe 30: Drehimpuls-Erwartungswerte (schriftlich, 4 Punkte)

Ein System sei in einem Eigenzustand $|j,\, m\rangle$ zu J^2 und J_z mit

$$J^2\,|j,\, m\rangle \;=\; \hbar^2\, j\,(j\,+\,1)\,|j,\, m\rangle\ , \qquad J_z\,|j,\, m\rangle \;=\; \hbar\, m\,|j,\, m\rangle\ .$$

Die Leiteroperatoren sind definiert als

$$J_\pm \;=\; J_x \,\pm\, i\, J_y \qquad \text{mit} \qquad J_\pm\,|j,\, m\rangle = \hbar\,\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m\,\pm\,1)}\,|j,\, m\,\pm\,1\rangle$$

und

$$[J_+,\, J_-] = 2\,\hbar\, J_z\ .$$

Berechnen Sie hierfür $\langle J_x\rangle$ und $\langle J_x^2\rangle$.

Aufgabe 31: Vertauschungsrelationen (mündlich, 4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen für die Komponenten L_i des Bahndrehimpulsoperators $\vec{L} \,=\, \vec{r} \,\times\, \vec{p}$.

i) [1,5 Punkte] $\quad [L_i,\, r_j] \;=\; i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\, r_k\ ,$

ii) [1,5 Punkte] $\quad [L_i,\, p_j] \;=\; i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\, p_k\ ,$

iii) [1 Punkt] $\quad [L_i,\, r^2] \;=\; [L_i,\, p^2] \;=\; [L_i,\, \vec{r}\,\cdot\,\vec{p}] \;=\; 0\ .$

Dabei wurde die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, d. h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Aufgabe 32: Kugelsymmetrischer Potentialtopf (schriftlich, 6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im kugelsymmetrischen Potential

$$V\,(r) \;=\; \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad r \,\leq\, a \\ 0 & \text{für} \quad r \,>\, a \end{cases}\ .$$

a) [1,5 Punkte] Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten?

b) [1,5 Punkte] Machen Sie den Separationsansatz

$$\psi\,(r,\, \vartheta,\, \varphi) \;=\; R\,(r)\, Y_l^m\,(\vartheta,\, \varphi)\ .$$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m\,(\vartheta,\, \varphi)$ sind Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator L^2:

$$L^2\, Y_l^m\,(\vartheta,\, \varphi) \;=\; \hbar^2\, l\,(l\,+\,1)\, Y_l^m\,(\vartheta,\, \varphi)\ .$$

Geben Sie die verbleibende Differentialgleichung für $R\,(r)$ an.

c) [1,5 Punkte] Betrachten Sie jetzt Teilchen mit dem Drehimpuls $l \;=\; 0$. Leiten Sie unter Verwendung von Stetigkeitsbedingungen eine Bestimmungsgleichung für die Energien der gebundenen Zustände ab.

d) [1,5 Punkte] Für welche V_0 existieren gebundene Zustände? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis für den eindimensionalen Potentialtopf.

Aufgabe 33: Erwartungswerte beim Wasserstoffatom **(mündlich, 6 Punkte)**

Die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet

$$\psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)\, Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_B^3}}\, e^{-\frac{r}{a_B}} ,$$

dabei ist a_B der Bohr-Radius

$$a_B = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2} .$$

a) [4 Punkte] Berechnen Sie die Orts- und Impulserwartungswerte

$$\langle x \rangle , \quad \langle y \rangle , \quad \langle z \rangle , \quad \langle p_x \rangle , \quad \langle p_y \rangle , \quad \langle p_z \rangle$$

sowie die Erwartungswerte der Quadrate

$$\langle x^2 \rangle , \quad \langle y^2 \rangle , \quad \langle z^2 \rangle , \quad \langle p_x^2 \rangle , \quad \langle p_y^2 \rangle , \quad \langle p_z^2 \rangle$$

und zeigen Sie, dass die Unschärferelation in jeder Koordinate erfüllt ist.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Erwartungswerte des Betrags des Ortsvektors $\langle r \rangle$ und seines Inversen $\langle \frac{1}{r} \rangle$ sowie die Erwartungswerte von kinetischer $\langle T \rangle$ und potentieller $\langle V \rangle$ Energie. Verifizieren Sie die Beziehung $2\,\langle T \rangle = -\langle V \rangle$.

Hinweis: Dies ist ein Spezialfall des aus der klassischen Mechanik bekannten Virialsatzes, der für eine Bewegung im Potential $V(r) = a\,r^n$ besagt: $2\,\langle T \rangle = n\,\langle V \rangle$.