Übungen zur Atom- und Quantenphysik: Blatt 6 SS 2017 Prof. Rohlfing

Abgabe: Mittwoch, 24.05.2017, Besprechung: 30./31.05.2017

Aufgabe 18: Funktion eines Operators **(mündlich, 3 Punkte)**

Die Matrix $\hat{\sigma}_x$ sei definiert durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweisen Sie die Beziehung

$$e^{i\,\alpha\,\hat{\sigma}_x} = \underline{1}\cos(\alpha) + i\,\hat{\sigma}_x \sin(\alpha) ,$$

wobei $\underline{1}$ die 2×2-Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 19: Darstellungstheorie **(schriftlich, 4 Punkte)**

Ein Hilbertraum werde von einer Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ aufgespannt (Vollständigkeitsrelation: $\sum_\nu |\alpha_\nu\rangle\langle\alpha_\nu| = 1$, Orthonormalität: $\langle\alpha_\mu|\alpha_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$).

a) [1 Punkt] Geben Sie die Darstellung eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis an.

b) [1 Punkt] Transformieren Sie den in a) gewonnenen Ausdruck auf eine neue Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$ ($\sum_\nu |\beta_\nu\rangle\langle\beta_\nu| = 1$, $\langle\beta_\mu|\beta_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$).

Hinweis: Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation.

c) [2 Punkte] Stellen Sie nun das Skalarprodukt $\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle$ (Erwartungswert des Operators $\hat{Q}$) zuerst in der Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ dar, transformieren sie auf die Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$ und zeigen Sie, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt.

Aufgabe 20: Dirac-Notation **(mündlich, 6 Punkte)**

Es seien $|\varphi_n\rangle$ die Eigenzustände eines hermiteschen Operators $\hat{H}$ (dies kann z. B. der Hamilton-Operator eines physikalischen Systems sein), d. h. $\hat{H}\,|\varphi_n\rangle = E_n\,|\varphi_n\rangle$. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Zustände eine diskrete, orthonormierte Basis bilden, d. h. $\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn}$. Der Operator $\hat{U}(m, n)$ sei definiert durch

$$\hat{U}(m, n) = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n| .$$

a) [1 Punkt] Bestimmen Sie den zu $\hat{U}(m, n)$ adjungierten Operator $\hat{U}^\dagger(m, n)$.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{U}(m, n)]$.

c) [1 Punkt] Beweisen Sie die Beziehung

$$\hat{U}(m, n)\,\hat{U}^\dagger(p, q) = \delta_{n\,q}\,\hat{U}(m, p) .$$

d) [1 Punkt] Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Sp}\,\{\hat{U}(m, n)\}$.

e) [1 Punkt] Es sei $\hat{A}$ ein Operator mit den Matrixelementen $A_{mn} = \langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle$. Beweisen Sie die Beziehung

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}\,\hat{U}(m, n) .$$

f) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $A_{pq} = \mathrm{Sp}\,\{\hat{A}\,\hat{U}^\dagger(p, q)\}$.

Aufgabe 21: Wasserstoffspektrum (schriftlich, 5 Punkte)

Berechnen Sie die Übergangsenergien der Lyman-β- und Balmer-γ-Linien von Deuterium. Geben Sie die Energiedifferenz dieser Isotopieverschiebung zum entsprechenden Übergang im Wasserstoff an. Erläutern Sie kurz den physikalischen Grund hierfür.

Benutzen Sie aktuelle Massenwerte und rechnen Sie in den Einheiten [cm^{-1}] bis zur sechsten Stelle nach dem Komma. Geben Sie auch die Übergangswellenlängen der Spektrallinien an.

Welche Linien kann man bei Umgebungsluft beobachten und zu welchen Werten ändern sich dann die beobachteten Wellenlängen?