Aufgabe 11: **δ-Potentialbarriere** **(mündlich, 4 Punkte)**

Gesucht ist das Verhalten einer Teilchenwelle, die sich von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = \beta\,\delta(x) \qquad \text{mit} \qquad \beta > 0$$

zubewegt.

a) Leiten Sie durch Integration der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Sprungbedingung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right] = \frac{2\,m\,\beta}{\hbar^2}\,\psi(0)$$

für die Ableitung der Wellenfunktion her. Verwenden Sie dazu die Stetigkeit von $\psi(x)$.

b) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T. Zeigen Sie, dass gilt: $R + T = 1$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf von $T(E)$, z. B. unter Verwendung eines Grafikprogramms.

Aufgabe 12: **Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden** **(mündlich, 6 Punkte)**

Ein Teilchen befinde sich in einem Potentialtopf der Länge L mit unendlich hohen Wänden. Das Potential lautet also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \le \frac{L}{2} \\ \infty & \text{für} \quad |x| > \frac{L}{2} \end{cases} \quad .$$

a) Wie lauten die normierten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ und die Energien E_n ($n = 1, 2, 3, ...$) für diesen Potentialtopf?

b) Betrachten Sie nun die nichtstationäre Lösung der Schrödingergleichung $\psi(x, t)$ mit der Anfangsbedingung

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right) .$$

Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t)$, die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ sowie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ und die Unschärfe $(\Delta x)^2$. Skizzieren Sie $\rho(x, t)$ zu den Zeiten

$$t = 0\,, \quad \frac{T}{4}\,, \quad \frac{T}{2}\,, \quad \frac{3\,T}{4} \qquad \text{mit} \qquad T = \frac{2\,\pi\,\hbar}{E_2 - E_1} .$$

c) Untersuchen Sie analog zu Aufgabenteil b) die nichtstationäre Lösung mit

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x) + \varphi_3(x)\right)$$

und diskutieren Sie die Unterschiede.

Aufgabe 13: **Gebundene Zustände im δ-Potential** **(schriftlich, 10 Punkte)**

Gegeben sei zunächst ein einzelnes anziehendes δ-Potential der Form

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \qquad \text{mit} \qquad \alpha > 0\,.$$

Gesucht sind gebundene Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, d. h. Lösungen mit $E < 0$.

a) Machen Sie geeignete Ansätze für die Wellenfunktion in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ und verwenden Sie die in Aufgabe 11 hergeleiteten Anschlussbedingungen am δ-Potential. Bestimmen Sie damit die möglichen Energiewerte und die zugehörigen Wellenfunktionen. Wie viele gebundene Zustände gibt es?

b) Als einfaches Modell für das Elektron im H_2^+-Molekülion dient das negative Doppeldelta-Potential

$$V(x) = -\alpha\left[\delta\left(x + \frac{L}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]\,.$$

Gesucht sind wiederum Zustände mit $E < 0$. Aufgrund der Symmetrie des Problems sind die Lösungen entweder gerade oder ungerade. Machen Sie für die beiden Fälle geeignete Ansätze und leiten Sie aus den Anschlussbedingungen Bestimmungsgleichungen für die möglichen Energiewerte her.

c) Lösen Sie diese Gleichungen grafisch (qualitativ) für verschiedene Werte von L. Für welche Werte von L existieren gerade bzw. ungerade Lösungen?

d) Wie lauten die Energiewerte in den Grenzfällen $L \to 0$ und $L \to \infty$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Teilergebnis aus Teilaufgabe a).