

Aufgabe 40: Magnetische Resonanz und Bloch-Gleichungen (schriftlich, 10 Punkte)

Wie in der Vorlesung hergeleitet wurde, bewegt sich die Magnetisierung \vec{M} unter dem Einfluss eines Magnetfeldes $\vec{B}(t)$ gemäß der Gleichung

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{M} \times \vec{B}.$$

Für das Magnetfeld gelte im Folgenden

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_z + B_1 [\vec{e}_x \cos(\omega t) + \vec{e}_y \sin(\omega t)]$$

sowie die Abkürzungen

$$\hbar\omega_0 = g\mu_B B_0 \quad \text{und} \quad \hbar\omega_1 = g\mu_B B_1.$$

- a) [1 Punkt] Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Komponenten M_x , M_y und M_z ?
- b) [1 Punkt] Spontane Emissionsprozesse sowie Kopplungen an andere Freiheitsgrade führen zu einer Relaxation der Magnetisierung. Man unterscheidet dabei üblicherweise die transversale Relaxation, beschrieben durch eine Relaxationszeit T_2 und die longitudinale Relaxation, beschrieben durch eine Relaxationszeit T_1 . Diese Prozesse führen zu *zusätzlichen* Beiträgen in den Bewegungsgleichungen gemäß

$$\left. \frac{dM_{x,y}}{dt} \right|_{\text{rel}} = -\frac{M_{x,y}}{T_2}, \quad \left. \frac{dM_z}{dt} \right|_{\text{rel}} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}.$$

Dabei ist $M_0 \vec{e}_z$ die Gleichgewichtsmagnetisierung in Abwesenheit des rotierenden Feldes B_1 . Wie lauten damit die Bewegungsgleichungen für M_x , M_y und M_z ? Diese Gleichungen heißen auch Bloch-Gleichungen.

- c) [2 Punkte] Die Bloch-Gleichungen nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man sie in ein mit \vec{B}_1 mitrotierendes Koordinatensystem transformiert. Diese Transformation wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_x &= M_x \cos(\omega t) + M_y \sin(\omega t) \\ \tilde{M}_y &= -M_x \sin(\omega t) + M_y \cos(\omega t) \\ \tilde{M}_z &= M_z \end{aligned}$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen für \tilde{M}_x , \tilde{M}_y und \tilde{M}_z ?

- d) [3 Punkte] Bestimmen Sie die stationäre Lösung dieses Gleichungssystems ($d\tilde{M}_i/dt = 0$) und skizzieren Sie den Verlauf der drei Komponenten \tilde{M}_x , \tilde{M}_y und \tilde{M}_z als Funktion der Verstimmung $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Nehmen Sie für die Skizze gleiche Relaxationszeiten an, d. h. $T_1 = T_2$.
- e) [3 Punkte] Im Folgenden werde die Relaxation vernachlässigt, d. h. $1/T_1 = 1/T_2 = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Betrag der Magnetisierung zeitlich konstant ist, d. h.

$$\frac{d}{dt} |M|^2 = 0.$$

Bestimmen Sie mit dem Ansatz $\vec{M}(t) = \vec{M}^0 e^{-i\Omega t}$ die Eigenfrequenzen des Systems. Wie lautet die Lösung für $\vec{M}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\tilde{M}_x(0) = \tilde{M}_y(0) = 0$, $\tilde{M}_z(0) = M_0$?

Aufgabe 41: Protonium**(mündlich, 5 Punkte)**

Das Protonium-Atom, $Pn(n,1)$, besteht aus einem Proton und einem Antiproton. Nach der Erzeugung lebt es ungefähr $1 \mu\text{s}$ bevor es annihiliert. Seine hochaufgelöste Spektroskopie könnte einen empfindlichen Test über mögliche Unterschiede zwischen normaler Materie und Antimaterie ergeben.

- [2 Punkte] Bestimmen Sie die erwartete Rydbergkonstante.
- [1 Punkt] Wie groß ist der Abstand der beiden Protonen im Grundzustand?
- [2 Punkte] Schätzen Sie die Hyperfeinstrukturaufspaltung im Grundzustand ab.

Aufgabe 42: Spektralanalyse**(mündlich, 5 Punkte)**

Für die Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen des Balmer- α -Übergangs $2s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 3p \ ^2P_{3/2}$ werden spektrale Aufspaltungen von $\Delta\nu = 4,5 \text{ GHz}$ (Feinstruktur) und $\Delta\nu = 193 \text{ MHz}$ (Hyperfeinstruktur) gefunden.

- [3 Punkte] Wenn Sie nur die Feinstrukturkomponenten spektral auflösen wollen, wie viele Linien des Gitters müssen beleuchtet sein, damit die spektrale Auflösung erreicht werden kann?

Wenn Sie ein typisches Gitter mit einer Strichzahl von 1200 (1800) Linien/mm einsetzen, in welcher Gitterordnung müssen Sie mindestens arbeiten?

Welche Brennweite muss der Fokussierspiegel mindestens haben, damit ein beugungsbegrenztes Bild des Spaltes ($d = 10 \mu\text{m}$) auf dem Gitter erzeugt wird?

Handelsübliche Spektrometer sind typischerweise mit 0,5 m und mit 1 m Brennweite erhältlich. Welchen Einfluss hat das auf die Auswahl des Gitters und die Beugungsordnung, mit der Sie arbeiten können?

- [2 Punkte] Wenn Sie ein Fabry-Perot-Interferometer mit einem Plattenabstand von $d = 1 \text{ cm}$ und einem Reflexionsvermögen der Spiegel von $R = 98\%$ einsetzen, lässt sich dann auch die Hyperfeinstruktur der Zeeman-Linien auflösen?

Wie kann man die Zentralwellenlänge des Fabry-Perot-Interferometers über die Hyperfeinstruktur verstimmen, um ein Spektrum aufzunehmen?