**Übungen zur Atom- und Quantenphysik: Blatt 11** **SS 2017** **Prof. Rohlfing**
**Abgabe: Donnerstag, 06.07.2017, Besprechung: 11./12.07.2017**

---

**Aufgabe 37: Aufspaltung der Balmer-Linie im Magnetfeld (schriftlich, 8 Punkte)**

Berechnen Sie die Aufspaltung der Balmer-$\alpha$-Linie von Wasserstoff im Übergang 2s $^2S_{1/2} \rightarrow$ 3p $^2P_{3/2}$ im Magnetfeld. Energetische Verschiebung eines Hyperfein-Niveaus gegenüber dem Feinstruktur-Niveau für $L > 0$:

$$\Delta E_{\mathrm{HFS}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\, g_I\, \mu_k\, \mu_B}{J\,(J+1)\,(2\,l+1)} \frac{Z^3}{a_0^3\, n^3} \left[F\,(F+1) - J\,(J+1) - I\,(I+1)\right] .$$

Geben Sie die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung der Zustände und der Spektrallinien

a) [4 Punkte] ohne Magnetfeld und

b) [4 Punkte] für eine Magnetfeldstärke von $B = 1$ Tesla an.

Vernachlässigen Sie dabei den Beitrag des Kern-Zeeman-Effektes zum $g_j$-Faktor.

**Aufgabe 38: Spinpräzession im Magnetfeld (mündlich, 8 Punkte)**

Ist ein Elektron (zum Beispiel in einem Kristallgitter) an einem bestimmten Ort lokalisiert, so kann sein Spin $\vec{S}$ of als einziger Freiheitsgrad angesehen werden. Bei Anwesenheit eines homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeldes $\vec{B} = B\,\vec{e}_x$ lautet der Hamiltonoperator

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{g}{2}\, \mu_B\, \vec{\sigma} \cdot \vec{B} .$$

Dabei ist $\mu_B$ das Bohr'sche Magneton und $g$ der Landé-Faktor des Elektrons. $\vec{\sigma}$ ist der Vektor der Pauli'schen Spinmatrizen und für die Spinoperatoren gilt $S_i = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_i$.

a) [1 Punkt] Wie lautet die Matrixdarstellung von $H$ in der Basis der Eigenvektoren $|\uparrow\rangle = \binom{1}{0}$ und $|\downarrow\rangle = \binom{0}{1}$ zu $S_z$?

   *Hinweis*: Verwenden Sie die Larmor-Frequenz $\omega_L = g\,\mu_B\,B/\hbar$.

b) [2 Punkte] Der allgemeinste Zustand des Systems lautet

$$|\psi\,(t)\rangle = \alpha_+\,(t)\,|\uparrow\rangle + \alpha_-\,(t)\,|\downarrow\rangle .$$

   Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung für $|\psi\rangle$? Welche Bewegungsgleichungen ergeben sich daraus für die Koeffizienten $\alpha_+$ und $\alpha_-$?

c) [2 Punkte] Die gekoppelten Bewegungsgleichungen lassen sich leicht mit Hilfe der zweiten Ableitung entkoppeln. Lösen Sie die sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen mit der Anfangsbedingung $|\psi\,(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Was ergibt sich für $|\psi\,(t)\rangle$?

d) [1 Punkt] Berechnen Sie für diesen Zustand die Erwartungswerte $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ und $\langle S_z\rangle$.

e) [2 Punkte] Berechnen Sie außerdem $\langle S_x^2\rangle$, $\langle S_y^2\rangle$ und $\langle S_z^2\rangle$ sowie die zugehörigen Schwankungen $\Delta\,S_x$, $\Delta\,S_y$ und $\Delta\,S_z$.

**Aufgabe 39: Unschärferelation** **(schriftlich, 4 Punkte)**

Betrachten Sie die beiden Operatoren $x^2$ und $L_z$.

a) [2 Punkte] Formulieren Sie die Unschärferelation für $(\Delta\, x^2)\,(\Delta\, L_z)$.

b) [1 Punkt] Berechnen Sie $\Delta\, L_z$ für einen beliebigen Wasserstoffzustand $|\psi_{nlm}\rangle$.

c) [1 Punkt] Was können Sie über den Erwartungswert $\langle x\, y\rangle$ in diesem Zustand schlussfolgern?