Aufgabe 34: He$^+$-Ion (mündlich, 7 Punkte)

a) [4 Punkte] Die Wellenlänge der ersten Linie der Lyman-Serie in ionisiertem Helium ist $\lambda = 30{,}3782$ nm. Bestimmen Sie

i) die Rydberg-Konstante für ^{4}He,

ii) die Ionisierungsenergie von He$^+$ in eV.

b) [3 Punkte] Folgende Wellenlängen einer Übergangsserie wurden in Luft beobachtet:

H Atom [Å]	6562,8		4861,3		4340,5		4101,7
Atom X [Å]	6560,1	5411,6	4859,3	4561,6	4338,7	4199,9	4100,0

Die Dispersion von „Standardluft“ (15 °C; 1013,25 hPa; 0,045 % CO_2) ist gegeben durch:

$$(n - 1) = 0{,}05792105 \cdot [238{,}0185 - \lambda^{-2}]^{-1} + 0{,}00167917 \cdot [57{,}362 - \lambda^{-2}]^{-1} .$$

Einheit von λ in μm (P.E. Ciddor: Appl. Optics **35**, 1566-1573 (1996))[1].

Approximativ kann man für die Differenz von $\lambda_{\text{Vak}} - \lambda_{\text{Luft}}$ folgende Werte annehmen:

λ [nm]	660	540	490	460	430	420	410
$\lambda_{\text{Vak}} - \lambda_{\text{Luft}}$ [nm]	0,1822	0,1501	0,1368	0,1288	0,1209	0,1183	0,1157

Geben Sie die Übergangsfrequenz (in cm^{-1}) an und bestimmen Sie das Atom, zu dem die unbekannte Serie gehört, und die Zustände, die damit verknüpft sind.

Aufgabe 35: Spins und Spinoren (mündlich, 5 Punkte)

Die Spin-Eigenvektoren können in der Basis, in der S_z diagonal ist, als

$$|\uparrow\rangle = \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ geschrieben werden.

a) [2 Punkte] Zeigen Sie (z. B. mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren S_+, S_-), dass die Operatoren S_x, S_y durch die Matrizen

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie in dieser Basis die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren χ_y zu S_y.

[1] http://dx.doi.org/10.1364/ao.35.001566

Aufgabe 36: **Teilchen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern** **(schriftlich, 8 Punkte)**

Gesucht sind das Energiespektrum und die Wellenfunktion eines Teilchens mit Ladung $q = -e$ und Masse m in homogenen, zeitlich konstanten, gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}) = (\mathcal{E}, 0, 0)$ zeige in x-Richtung, die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, \mathcal{B})$ in z-Richtung.

a) [2 Punkte] Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass sich im stationären Fall die Felder folgendermaßen aus den Potentialen ϕ und $\vec{A}$ berechnen lassen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r}) , \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) .$$

Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r}) = (0, \mathcal{B}\,x, 0)$ eine mögliche Wahl für das Vektorpotential ist und geben Sie ein passendes skalares Potential $\phi(\vec{r})$ an.

b) [3 Punkte] Wie lautet der Hamiltonoperator zu diesem Problem in Ortsdarstellung? Zeigen Sie, dass die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\,\psi = E\,\psi$ mit dem Ansatz

$$\psi(x, y, z) = \exp\left[i\left(k_y\,y + k_z\,z\right)\right]\varphi(x)$$

in eine eindimensionale Gleichung für $\varphi(x)$ übergeht. Führen Sie diese Gleichung mit der Transformation $\tilde{x} = x - x_0$ und $\tilde{E} = E - E_0$ in die Schrödingergleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators über. Wie müssen hierzu x_0 und E_0 gewählt werden?

c) [3 Punkte] Wie lauten die Eigenwerte $\tilde{E}$ und damit die Energieeigenwerte E des ursprünglichen Problems? Wie lauten die Eigenfunktionen $\psi(x, y, z)$? Benutzen Sie die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\varphi_n(\tilde{x}) \sqrt{\frac{\beta}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}}}\,H_n(\beta\,\tilde{x})\,e^{-\frac{1}{2}\beta^2\tilde{x}^2} \qquad \text{mit} \qquad \beta = \sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}} .$$