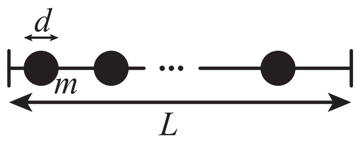
Aufgabe 22 (mündlich): Eindimensionales harte Kugeln-Gas (5 Punkte)
Betrachten Sie ein eindimensionales Gas aus N harten Kugeln, die jeweils den Durchmesser d und die Masse m besitzen. Die Länge des Systems sei L.



a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme

$$Z = \frac{1}{h^N} \int e^{-\beta H(q,p)} \, \mathrm{d}^N q \, \mathrm{d}^N p$$

des Systems. Zeigen Sie dabei mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Ortsintegration den Ausdruck

$$V_N(L) = \frac{1}{N!}(L - Nd)^N$$

liefert.

b) Ermitteln Sie im Fall großer N die freie Energie F, die innere Energie U, die Entropie S und die Zustandsgleichung.

Aufgabe 23 (schriftlich): Zweidimensionales nicht-ideales Gas (10 Punkte)
Eine adsorbierte Oberflächenschicht der Fläche A bestehe aus N Atomen, die sich frei über die Oberfläche bewegen und wie ein klassisches zweidimensionales Gas behandelt werden können. Die Atome wechselwirken über ein Potential $W(r)$ miteinander, das nur von ihrem gegenseitigen Abstand r abhängt.

a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potential in der Virialentwicklung zweiter Ordnung.

b) Bestimmen Sie den Druck des Gas-Filmes, d.h. die mittlere Kraft pro Längeneinheit als Funktion der Teilchendichte $n = \langle N \rangle / A$.

c) Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten B_2 für das in der Vorlesung eingeführte Modellpotential

$$W(r) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad r < r_0 \\ -4\varepsilon \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 & \text{für} \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

im Grenzfall $k_B T \gg \varepsilon$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in der Vorlesung behandelten dreidimensionalen Fall.

Aufgabe 24 (mündlich): Dietrici-Gas (5 Punkte)

Das Dietrici-Gas ist ein Modell für ein reales Gas. Es wird beschrieben durch die Zustandsgleichung

$$p = \frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{V - Nb} \exp\left(-\frac{a}{k_{\mathrm{B}}T}\frac{N}{V}\right) \tag{1}$$

mit den materialspezifischen Parametern a und b.

a) Zeigen Sie, dass sich unter der Annahme kleiner a und b aus Gl. (1) die Zustandsgleichung des idealen und des van der Waals-Gases ableiten lassen.

b) Die kritischen Größen p_{c}, V_{c} und T_{c} sind wie beim van der Waals-Gas dadurch bestimmt, dass gilt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,N} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T,N} = 0\ .$$

Bestimmen Sie die kritischen Parameter p_{c}, V_{c} und T_{c}.

c) Durch Einführung von auf den kritischen Punkt bezogenen Variablen

$$\overline{p} = \frac{p}{p_{\mathrm{c}}} \quad , \quad \overline{V} = \frac{V}{V_{\mathrm{c}}} \quad \text{und} \quad \overline{T} = \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}$$

lässt sich die Zustandsgleichung in eine universelle Form bringen. Wie lautet diese?