Aufgabe 19 (mündlich): Spektrale Energiedichte und Wiensches Verschiebungsgesetz (5 Punkte)
Die mittlere Besetzungszahl einer Photonenmode ist bei thermischem Licht gegeben durch die Planck-Verteilung

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_k} - 1}$$

mit $\varepsilon_k = \hbar\omega_k = \hbar c k$. Für die Wellenlänge λ gilt $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, für die Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

a) Berechnen Sie die spektrale Energiedichte pro Frequenzintervall $u_1(\nu) = \frac{1}{V}\sum_k \varepsilon_k \langle n_k \rangle \delta\left(\nu - \frac{\omega_k}{2\pi}\right)$ sowie die spektrale Energiedichte pro Wellenlängenintervall $u_2(\lambda) = \frac{1}{V}\sum_k \varepsilon_k \langle n_k \rangle \delta\left(\lambda - \frac{2\pi}{k}\right)$. Beachten Sie dabei, dass Photonen zwei mögliche Polarisationsrichtungen besitzen. V ist das Volumen.

b) Bestimmen Sie die Frequenz $\nu_{\max}$ bzw. die Wellenlänge $\lambda_{\max}$, bei denen u_1 bzw. u_2 maximal werden.
Hinweis: Die auftretenden transzendenten Gleichungen müssen nicht explizit gelöst werden.

c) Wie hängen $\nu_{\max}$ und $\lambda_{\max}$ von der Temperatur ab (Wiensches Verschiebungsgesetz)? Gilt der Zusammenhang $\nu_{\max}\lambda_{\max} = c$?

Aufgabe 20 (schriftlich): Thermisches Licht und Laserlicht (10 Punkte)
Gemäß dem Welle-Teilchen-Dualismus zeigt Licht auch Teilchencharakter; die entsprechenden Lichtquanten werden Photonen genannt. Da Photonen beliebig emittier bzw. absorbiert werden können, ist die Photonenzahl n nicht fest vorgegeben, sondern sie schwankt um einen Mittelwert $\langle n \rangle$. Die Verteilung der Photonenzahl unterscheidet sich dabei, je nachdem ob es sich um thermisches oder Laserlicht handelt.
In einem Hohlraum befinde sich thermisches Licht der Energie $\hbar\omega$. Die Wahrscheinlichkeit W_n dafür, genau n Lichtteilchen (Photonen) mit dieser Energie vorzufinden, ist proportional zu $e^{-\beta n \hbar\omega}$ mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

a) Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?
Hinweis: Wahrscheinlichkeiten müssen normiert sein.

b) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle n \rangle$ und das mittlere Schwankungsquadrat $\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle = \left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle$ als Funktion der absoluten Temperatur T.

c) Drücken Sie die relative Schwankung $\sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle}/\langle n \rangle$ alleine durch die mittlere Teilchenzahl aus; d.h. schreiben Sie die relative Schwankung in der Form $\sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle}/\langle n \rangle = f(\langle n \rangle)$, so dass sich die Temperaturabhängigkeit von $\sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle}/\langle n \rangle$ aus der Temperaturabhängigkeit von $\langle n \rangle$ und der funktionalen Form der von Ihnen aus den Ergebnissen der Teilaufgabe **b)** zu bestimmenden Funktion f ergibt. Welchem Wert strebt die relative Schwankung im Grenzfall $\langle n \rangle \to \infty$ zu?

Handelt es sich nicht um thermisches sondern Laserlicht, so ist die Wahrscheinlichkeit W_n genau n Photonen vorzufinden, proportional zu $\alpha^n/n!$, wobei α ein Parameter ist, der durch die Feldstärke des Laserlichts bestimmt ist.

d) Ermitteln Sie den noch offenen Proportionalitätfaktor.

e) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl und das mittlere Schwankungsquadrat für Laserlicht als Funktion des Parameters α.

f) Geben Sie analog zu Teilaufgabe **c)** die relative Schwankung als Funktion der mittleren Teilchenzahl an und bestimmen Sie daraus den Grenzwert der relativen Schwankung im Grenzfall $\langle n \rangle \to \infty$.

Aufgabe 21 (mündlich): Debye-Modell des Festkörpers (6 Punkte)

Die Quantisierung der Gitterschwingungen eines idealen Kristalls führt zum Konzept der Phononen als elementare Feldquanten. Wie bei Photonen handelt es sich dabei um Bosonen, die in unbeschränkter Zahl erzeugt oder vernichtet werden können, d.h. auch für Phononen verschwindet das chemische Potential. Im Debye-Modell wird für die Phononen eine Dispersionsrelation derselben Form wie für Photonen angenommen, es gilt

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar v|\vec{k}| \tag{1}$$

Dabei ist v die Schallgeschwindigkeit im Kristall. Zu jedem $\vec{k}$ existieren drei mögliche Schwingungsrichtungen: eine longitudinale und zwei transversale Schwingungen.

a) Da der Kristall aus einer endlichen Zahl von N Atomen im Volumen V aufgebaut ist, hat er insgesamt $3N$ Freiheitsgrade. Es gibt daher nur $3N$ unterschiedliche Schwingungen. Der Bereich der möglichen $\vec{k}$-Werte ist dadurch eingeschränkt auf den Bereich $0 \leq |\vec{k}| \leq k_\mathrm{D}$. Bestimmen Sie den Debye-Wellenvektor k_D und die gemäß Gl. (1) dazugehörige Debye-Frequenz ω_D aus der Bedingung, dass die Anzahl der Zustände gleich $3N$ sein muss. Gehen Sie dazu wie üblich von der Summe über alle $\vec{k}$-Werte zum Integral über.

b) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $\Xi(T,V)$ und daraus das großkanonische Potential $\Omega(T,V)$ des Phononengases. Hinweis: Durch partielle Integration kommen Sie auf ein Integral der Form

$$D\left(\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right) = \int_0^{T_\mathrm{D}/T} \frac{x^3}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit der Debye-Temperatur } T_\mathrm{D} = \frac{\hbar\omega_\mathrm{D}}{k_\mathrm{B}} = \frac{\hbar v k_\mathrm{D}}{k_\mathrm{B}}\,.$$

das nicht analytisch gelöst werden kann.

c) Wie lautet $\Omega(T,V)$ in den Grenzfällen tiefer ($T \ll T_\mathrm{D}$) und hoher ($T \gg T_\mathrm{D}$) Temperaturen. *Hinweis: Im ersten Fall ist $\mathrm{e}^{-T_\mathrm{D}/T}$ vernachlässigbar gegen eins und die Integrationsgrenze kann unendlich gesetzt werden; es gilt dann*

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}\,.$$

Im zweiten Fall können die auftretenden Exponentialfunktionen ersetzt werden durch $\mathrm{e}^{\pm x} \approx 1 \pm x$.

d) Berechnen Sie in den beiden Grenzfällen tiefer und hoher Temperaturen die Entropie S und die innere Energie $U = \Omega + TS + \mu N$ der Phononen.

e) Bestimmen Sie in den beiden Grenzfällen die Wärmekapazität

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

und zeigen Sie, dass für tiefe Temperaturen gilt $C_V = T^3$ (Debye'sches T^3-Gesetz) und für hohe Temperaturen $C_V = \text{const.}$ (Dulong-Petit-Gesetz).