Aufgabe 9 (mündlich): Mikrokanonisches Ensemble aus harmonischen Oszillatoren (9 Punkte)
Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \ .$$

a) Berechnen Sie die Trajektorie $\big(q(t), p(t)\big)$ und zeigen Sie, dass dieses System ergodisch ist. Berechnen Sie die zeitlichen Mittelwerte $\overline{q}$ und $\overline{q^2}$ als Funktion der Energie E.

b) Bestimmen Sie die Phasenraumdichte $\rho(q,p)$ eines mikrokanonischen Ensembles aus harmonischen Oszillatoren mit der Energie E und der Energieunschärfe ΔE. Berechnen Sie die Ensemble-Mittelwerte $\langle q \rangle$ und $\langle q^2 \rangle$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Zeitmittelwerten aus Teilaufgabe **a)**.

Aufgabe 10 (schriftlich): Freies Teilchen im Volumen V (11 Punkte)
Ein Teilchen mit der Masse m sei in dem Volumen V eingesperrt. Das Volumen kann durch einen 3-dimensionalen unendlich hohen Potentialtopf mit den Kantenlängen L beschrieben werden. Die Eigenenergien sind dann durch $E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ gegeben, wobei $n_i = 1, 2, 3, \dots \ (i = x, y, z)$ die Quantenzahl in die entsprechende Richtung ist. Die Eigenzustände sind gegeben durch $|n_x, n_y, n_z\rangle$. In diesem System betrachten wir

a) ein statistisches Gemisch der Zustände $|2,1,1\rangle$, $|1,2,1\rangle$ und $|1,1,2\rangle$ mit jeweils $p = \frac{1}{3}$.

b) den reinen Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|2,1,1\rangle + |1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle\right)$.

c) ein statistisches Gemisch mit $p = \frac{1}{3}$ in $|2,1,1\rangle$ und mit $p = \frac{2}{3}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle\right)$.

d) ein statistisches Gemisch mit $p = \frac{1}{3}$ in $|2,1,1\rangle$, mit $p = \frac{1}{6}$ in $|1,2,1\rangle$ und mit $p = \frac{1}{2}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle\right)$.

Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, mit der der jeweilige Zustand zum Gemisch beiträgt. Stellen Sie für alle Fälle die Dichtematrix ρ auf. Berechnen Sie ρ^2 und $\mathrm{Sp}(\rho^2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Diagonalisieren Sie die Dichtematrix und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.