Aufgabe 28 (schriftlich): Kanonisches Ensemble aus Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen (10 Punkte)
Gegeben sei ein System aus N ($N \gg 1$) lokalisierten Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, die sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ befinden. Ein Spin kann entweder in Richtung oder in Gegenrichtung des Feldes zeigen, dabei besitzt er die Energie $+E_0$ bzw. $-E_0$ mit $E_0 = \mu_B B_0$. Im Folgenden sei n_+ die Zahl der Spins mit Energie $+E_0$ und $n_- = N - n_+$ die Zahl der Spins mit Energie $-E_0$.

a) Wie viele Realisierungen $g(n_+)$ gibt es zu einem gegebenen n_+?

b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, B_0, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, B_0, N)$.

c) Bestimmen Sie die innere Energie $U(T, B_0, N)$ und die Entropie $S(T, B_0, N)$. Was erhalten Sie für diese beiden Größen in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$?

d) Berechnen Sie die spezifische Wärme

$$C_{B_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{B_0,N}$$

und geben Sie deren Verhalten für tiefe und hohe Temperaturen an.

e) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle n_+\rangle$ der Spins mit Energie $+E_0$ und zeigen Sie, dass das Verhältnis $\langle n_+\rangle / \langle n_-\rangle$ der Besetzungen im Zustand mit Energie $+E_0$ und im Zustand mit Energie $-E_0$ durch eine Exponentialfunktion (Boltzmann-Faktor) gegeben ist.

f) Jeder Spin trägt ein magnetisches Moment $\mp\mu_B$. Berechnen Sie die Magnetisierung

$$M = \frac{\mu_B}{V} \left(\langle n_-\rangle - \langle n_+\rangle\right) \ .$$

Dabei ist V das Volumen. Skizzieren Sie den Verlauf von M als Funktion des Feldes B_0. Was erhalten Sie im Grenzfall eines schwachen Magnetfeldes, d.h. $\mu_B B_0 \ll k_B T$? Zeigen Sie, dass in diesem Grenzfall die Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$ das Curie'sche Gesetz

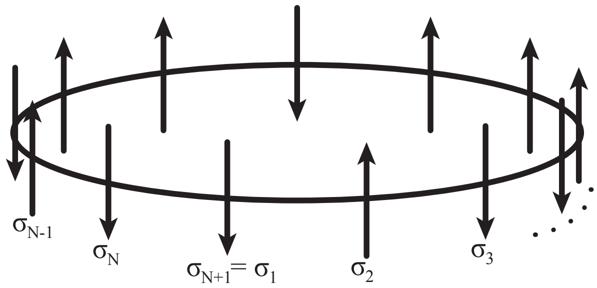
$$\chi = \frac{C}{T}$$

erfüllt. Bestimmen Sie C.

Aufgabe 29 (mündlich): Eindimensionales Ising-Modell (10 Punkte)

Das eindimensionale Ising-Modell beschreibt eine eindimensionale Kette von Spins. Jeder Spin hat zwei Einstellmöglichkeiten. Dies wird modelliert durch N Variablen σ_i ($i \in \{1, \ldots, N\}$), die jeweils die Werte $+1$ und -1 annehmen können. Die Spinvariablen sind also diskret und werden als klassische Größen aufgefasst. Es wird eine periodische Randbedingung angenommen, d.h. σ_{N+1} wird mit σ_1 identifiziert. Zwischen den Spins besteht eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung. Die Hamiltonfunktion hat also die Form

$$H(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \ .$$



a) Wie groß ist der Zustandsraum des Systems?

b) Welches sind die beiden niedrigsten Energiewerte und wie groß ist ihr Entartungsgrad $d(E, N)$? Welche Werte kann die Energie E bei festem N annehmen?

c) Bestimmen Sie durch Verallgemeinerung dieser Überlegung die Entartungsgrade $d(E, N)$ für alle Werte von E.

d) Berechnen Sie für gerades N die kanonische Zustandssumme

$$Z(\beta, N) = \sum_E d(E, N) e^{-\beta E} \ .$$

e) Bestimmen Sie daraus die Größe $\frac{1}{N}\ln(Z)$ für große Werte von N. Welche physikalische Bedeutung hat diese Größe?

f) Bestimmen Sie die mittlere Energie $U = \langle H \rangle$ und die mittlere Magnetisierung $\overline{M} = \frac{1}{N}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right\rangle$.

g) Berechnen Sie die Entropie für große Werte von N.