Aufgabe 1 (mündlich): Kombinatorik (7 Punkte)

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in einer Gruppe von N Personen

(i) zwei am selben Tag Geburtstag haben,

(ii) jemand am selben Tag wie Sie Geburtstag hat.

Ab welcher Anzahl ist jeweils die Wahrscheinlichkeit größer als 0,5 ?

b) In einer Urne sind die Buchstaben A, I, I, K, S, S, T, T, T. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei blindem Ziehen das Wort STATISTIK gezogen wird?

c) A würfelt 6 mal und gewinnt, wenn er mindestens eine Sechs erzielt, B würfelt 12 mal und gewinnt, wenn er mindestens zweimal eine Sechs erzielt. Wer hat die größere Gewinnchance?

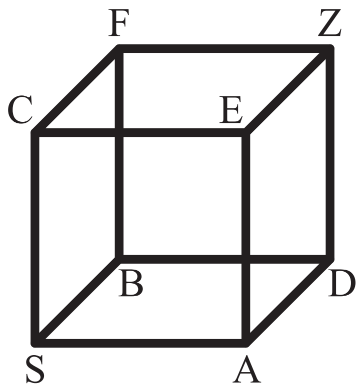
d) Ein Käfer krabbelt auf den Kanten eines Würfels. An jeder Ecke entscheidet er sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit für eine der drei möglichen Kanten. Für jede Kante benötigt er eine Minute. Er startet bei S. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er nach

(i) 3 Minuten

(ii) 4 Minuten

(iii) 5 Minuten

am Punkt Z?



Aufgabe 2 (mündlich): Buffons Nadelproblem (1777) (5 Punkte)

Eine Ebene sei mit äquidistanten, parallelen Linien im Abstand d überdeckt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nadel der Länge $l = d$, die auf die Ebene geworfen wird, eine Linie kreuzt?
Hinweis: Definieren Sie zunächst die Zufallsvariablen und ihren Definitionsbereich. Machen Sie dann Annahmen über Wahrscheinlichkeitsdichten.

b) Konstruieren Sie anhand des Ergebnisses von **a)** ein Experiment zur Bestimmung der Zahl π.

Aufgabe 3 (schriftlich): Stirling-Formel (4 Punkte)

a) Begründen Sie die Stirlingsche Formel

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \ .$$

Gehen Sie dazu von der Integraldarstellung

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

aus und entwickeln Sie den Logarithmus des Integranden um das Maximum bis zur zweiten Ordnung.

b) Skizzieren Sie die Funktionen $\frac{1}{n} \ln(n!)$ und $\ln\left(\frac{n}{e}\right)$ im Intervall $1 \leq n \leq 100$ und überzeugen Sie sich davon, dass für große n in guter Näherung $\ln(n!)$ durch $n \ln\left(\frac{n}{e}\right)$ ersetzt werden kann.

Aufgabe 4 (schriftlich): Poissonverteilung (6 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein durch die Wahrscheinlichkeit p charakterisiertes Ereignis bei N Versuchen n mal eintritt ist, wie gezeigt, durch die Binomialverteilung

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \, p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

gegeben. Gegeben sei eine Situation, für die die Wahrscheinlichkeit p sehr klein ist ($p \ll 1$) und bei der $n \ll N$ gilt. (Man beachte, dass falls N sehr groß ist, $W(n)$ mit $n \to N$ sehr klein wird, da der Faktor p^n sehr klein für $p \ll 1$ ist). Es lassen sich dann verschiedene Näherungen durchführen, um (1) in eine einfachere Form zu bringen.

a) Zeigen Sie, dass folgende Näherungen gelten:

$$\begin{aligned} (1-p)^{N-n} &\approx e^{-Np} \\ \frac{N!}{(N-n)!} &\approx N^n \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass sich mit diesen Näherungen (1) auf

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \tag{2}$$

reduziert, wobei $\lambda = Np$ die mittlere Zahl der Ereignisse ist. Die Verteilung (2) heißt Poisson-Verteilung.

Hinweis: Um die erste Näherung zu zeigen, berechne man die Taylorentwicklung von $\ln(1-p)$ *bis zum linearen Glied.*

b) Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung normiert ist, und berechnen Sie den Mittelwert $\langle n \rangle$ sowie die Varianz $(\Delta n)^2 = \left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle$.