Aufgabe 5: Nicht-Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion (schriftlich, 5 Punkte)

a) Zeigen Sie allgemein: Falls $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems ist, so führt die Funktion

$$\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) := L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t) ,$$

bei der die *totale* Zeitableitung einer Funktion $\Lambda(\vec{q}, t)$ addiert ist, auf dieselben Bewegungsgleichungen („Eichfreiheit“ von L).

b) Verifizieren Sie dies am Spezialfall des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 ,$$

$\tilde{L} = L + a\,x\,\dot{x}$ mit $a = \text{const.}$ Wodurch ist hierbei $\Lambda(\vec{q}, t)$ gegeben?

Aufgabe 6: Wirkungsintegral (schriftlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie eine Massenpunkt, der unter dem Einfluss der Gravitation aus der Höhe $z(t = 0) = h$ bis auf $z(t = T) = 0$ herabfällt. Wie Sie wissen, gilt $T = \sqrt{2\,h\,/\,g}$. Nehmen Sie an, dass

$$z_\alpha(t) = h - h \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha$$

gilt ($\alpha > 0$), und bestimmen Sie α. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Überprüfen Sie, dass $z_\alpha(t)$ für jedes α mit den angegebenen Randbedingungen verträglich ist.

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(z, \dot{z})$.

c) Bestimmen Sie für das angegebene $z_\alpha(t)$ das Wirkungsintegral

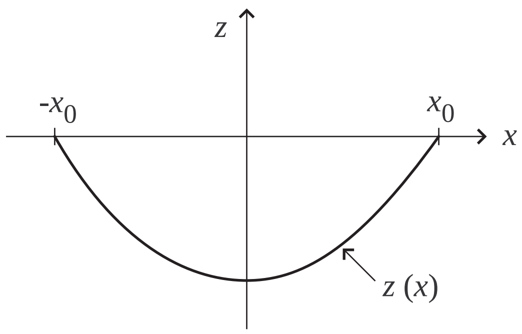
$$S(\alpha) = \int_0^T L(z_\alpha(t), \dot{z}_\alpha(t))\,dt .$$

d) Zeigen Sie, dass $S(\alpha)$ für $\alpha = 2$ extremal wird.

e) Überprüfen Sie (der Vollständigkeit halber), dass $z_\alpha(t)$ nur für $\alpha = 2$ die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 7: Hängendes Seil (mündlich, 10 Punkte)

Betrachten Sie ein Seil der Länge l_0 mit Längenmassendichte ρ_0 (= Masse pro Länge), das unter Einfluss der Gravitation zwischen zwei Aufhängepunkten hängt.



a) Begründen Sie, warum seine Länge durch

$$l = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (z'(x))^2}\, dx = 2 \int_0^{x_0} f(z, z')\, dx$$

gegeben ist.

b) Begründen Sie, warum seine potentielle Energie durch

$$E = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (z'(x))^2}\, z(x)\, dx = 2 \int_0^{x_0} h(z, z')\, dx$$

gegeben ist.

c) Das ruhig hängende Seil minimiert seine potentielle Energie unter der Nebenbedingungen $l = l_0$, indem es die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial z'} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)$$

löst (mit einem Lagrange-Multiplikator λ, der aus der Nebenbedingung $l = l_0$ resultiert). Zeigen Sie, dass daraus die Differentialgleichung

$$1 + z'^2 - \left(z - \frac{\lambda}{g\,\rho_0}\right) z'' = 0$$

folgt.

d) Zeigen Sie, dass die in c) angegebene Differentialgleichung durch

$$z(x) = \frac{\lambda}{g\,\rho_0} + a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

erfüllt wird.