7. Übung zur Physik II (SS 2014) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 20.05.2014 Abgabedatum: 27.05.2014

10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Aufgabe 29: Wärmeleitung (mündlich, 6 Punkte)

Betrachten Sie die Temperaturverteilung (in einer Raumdimension, x) in einem unendlich langen Stab. Mit einem Wärmestrom $j_x(x,\,t) \;=\; -\lambda \,\frac{\partial}{\partial x}\, T(x,\,t)$ und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\, j_x(t) \;=\; -c\,\rho\,\frac{\partial}{\partial t}\, T(x,\,t)$$

gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, T(x,\,t) \;=\; a\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, T(x,\,t) \qquad \text{mit} \qquad a \;=\; \frac{\lambda}{c\,\rho}\;.$$

a) Zeigen Sie, dass die Gaußkurve $T(x,\,t) \;=\; T_0 \,+\, \frac{A}{\sqrt{t\,-\,t_0}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x\,-\,x_0)^2}{4\,a\,(t\,-\,t_0)}}$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

b) Zur Zeit $t \;=\; 0$ gelte $T(x,\,0) \;=\; T_0 \,+\, (T_1 \,-\, T_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x\,-\,x_0)^2}{2\,\sigma_0^2}}$, wobei T_0 die „Grundtemperatur“ des Stabes, T_1 die Temperatur am Maximum der Gaußkurve und σ_0 die Breite der Verteilung darstellt. Bestimmen Sie A und t_0.

c) Skizzieren Sie $T(x,\,t)$ für $t \;=\; 0$ und für einen Zeitpunkt $t \;>\; 0$.

d) Stellen Sie die Breite $\sigma(t) \;=\; \sqrt{2\,a\,(t\,-\,t_0)}$ der Gaußkurve und ihre Höhe als Funktion von t graphisch dar. Für welchen Bereich für t sind Höhe und Breite der Gaußkurve sinnvoll definiert?

e) Bestimmen Sie die Wärmestromdichte $j_x(x,\,t)$ und stellen Sie sie für $t \;=\; 0$ und für einen Zeitpunkt $t \;>\; 0$ graphisch dar.

f) Bestimmen Sie die Wärmeenergie der Gaußkurve, also

$$Q(t) \;:=\; c\,\rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,x\,(T(x,\,t) \,-\, T_0)$$

und zeigen Sie, dass $Q(t) \;=\;$ const. bzgl. t gilt ($\rightarrow$ Energieerhaltung).

Aufgabe 30: Fehlerfunktion (mündlich, 4 Punkte)

Betrachten Sie die „Fehlerfunktion“ („error function“): $\mathrm{erf}(x) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\, d\,u\;.$

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{erf}(\infty) \;=\; 1$ und $\mathrm{erf}(x) \;=\; -\mathrm{erf}(-x)$ gilt.

b) Bestimmen Sie $\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{erf}(x)$.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{erf}(x) \;\approx\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x$ für $|x| \;\ll\; 1$.

d) Skizzieren Sie $\mathrm{erf}(x)$.

Aufgabe 31: Wärmeleitung (2) **(schriftlich, 4 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass

$$T(x,\, t) \;=\; T_0 \,+\, A \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right)$$

(mit der Fehlerfunktion aus Aufgabe 30) die Wärmeleitungsgleichung in einem unendlich langen Stab erfüllt.

b) Skizzieren Sie $T(x,\, t)$ für $t \,=\, 0$ und für einen Zeitpunkt $t \,>\, 0$. Welche Bedeutung haben A und T_0?

c) Berechnen Sie den Wärmestrom $j_x(x \,=\, 0,\, t)$ als Funktion von t und skizzieren Sie ihn.

Aufgabe 32: Integralsatz von Gauß **(schriftlich, 6 Punkte)**

Betrachten Sie den Integralsatz von Gauß, d. h.

$$\oint\limits_{\text{OF von } V} \vec{a}(\vec{r})\, d^2\vec{f} \;=\; \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}(\vec{r})\, d^3 r \;.$$

Betrachten Sie als Volumen V einen Quader, der durch die Ungleichungen

$$0 \,\le\, x \,\le\, 2\;, \qquad 0 \,\le\, y \,\le\, 3 \qquad \text{und} \qquad 0 \,\le\, z \,\le\, 1$$

definiert sei.

a) Berechnen Sie explizit die linke und die rechte Seite des Integralsatzes für das Vektorfeld

$$\vec{a}(\vec{r}) \;=\; (x^2,\, -y \,-\, z,\, 0)\;.$$

b) Ein Vektorfeld

$$\vec{a}(\vec{r}) \;=\; \left(x\,(z \,-\, \mathrm{e}^{x\,z}),\, -1 \,-\, y\,z,\, z\,\mathrm{e}^{x\,z} \,+\, z^3\right)$$

sei gegeben. Berechnen Sie den Fluss dieses Feldes durch die Oberfläche des oben angegebenen Quaders.