9. Übung zur Statistischen Physik (SS 2013) **Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 11.06.2013 Abgabedatum: 18.06.2013

Bitte beachten Sie: Die Klausur findet voraussichtlich am Freitag, den 19.07.2013, von 10:00 Uhr bis 13:00 Uhr im HS 2 statt.

Aufgabe 21: Glühemission (2 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal ein freies Elektronengas (vgl. Aufgabe 19) in einem Metall. Das Metall habe eine Oberfläche ($z = 0$); bei $z > 0$ befinde sich Vakuum. Die Vakuumkante befinde sich um die Austrittsarbeit W oberhalb der Fermi-Energie des Metalls. Die Temperatur des Systems sei nun $T > 0$; es gelte $W \gg k_B T$. Wegen $T > 0$ sind nun auch Zustände oberhalb E_F, ja sogar oberhalb $E_F + W$ mit (geringer) Wahrscheinlichkeit besetzt; diese Elektronen können aus dem Metall ins Vakuum austreten, und zwar mit Geschwindigkeit $v_z = p_z/m = \hbar k_z/m$, vorausgesetzt, sie weisen $k_z > 0$ auf. Bestimmen Sie den daraus resultierenden Teilchenstrom ins Vakuum.

Dieses Phänomen der Elektronenemission aus Glühkathoden findet in Elektronenquellen breite Verwendung.

Aufgabe 22: Halbleiter (6 Punkte)

Betrachten Sie einen Halbleiter, dessen Bandstruktur in der Nähe der Energielücke durch ein nach unten dispergierendes Valenzband ($E_v(\vec{k}) = -\frac{\hbar^2}{2\,m_h} k^2$) und durch ein nach oben dispergierendes Leitungsband ($E_c(\vec{k}) = E_g + \frac{\hbar^2}{2\,m_w} k^2$) gegeben sei. Meistens ist hierbei die Elektronenmasse m_e kleiner als die Lochmasse m_h. [Wie die Bandstruktur fern der Energielücke verläuft, ist im folgenden irrelevant.] Jeder Zustand kann mit zwei Elektronen besetzt werden (Spinentartung). Bei $T = 0$ sei das Valenzband komplett besetzt, das Leitungsband komplett unbesetzt.

a) Bestimmen Sie die Zustandsdichte des Systems. Skizzieren Sie die Bandstruktur und die Zustandsdichte.

b) Bestimmen Sie das chemische Potenzial μ, die Zahl der Elektronen N_e und die Zahl der Löcher N_h als Funktion der Temperatur. Nehmen sie hierbei vereinfachend an, dass $\mu \gg k_B T$ und $(E_g - \mu) \gg k_B T$ gilt, und verfahren Sie ähnlich wie in Aufgabe 19 c. Nutzen Sie ferner aus, dass (wegen der Ladungsneutralität des Gesamtsystems) $N_e = N_h$ gelten muss. Zeigen Sie, dass $N_e \cdot N_h \sim T^3 \exp(-E_g/k_B T)$ gilt. Skizzieren Sie $\mu(T)$.

c) Betrachten Sie nunmehr einen n-dotierten Halbleiter, der bei der Energie E_d (knapp unterhalb der Leitungsbandkante) einen zusätzlichen nicht-dispergierenden Zustand habe (solche Donator-Niveaus werden durch die Dotier-Atome bereitgestellt). Dieser Zustand soll maximal $N_{d,0}$ Elektronen aufnehmen können; seine tatsächliche Besetzungszahl ist durch $N_d = N_{d,0} \cdot n(\mu, T)$ gegeben, wobei $n(\mu, T)$ natürlich wieder die Fermi-Verteilungsfunktion ist.

   Nehmen Sie vereinfachend an, dass nun $(E_g - \mu) \ll \mu$ gelte (d. h. das chemische Potential liegt weit näher am Leitungsband als am Valenzband), so dass $N_h \ll N_e$ gilt. Nehmen Sie ferner an, dass (als Vereinfachung der Ergebnisse aus b) N_e durch den Ausdruck $N_e = N_{e,0} \exp(\beta(\mu - E_g))$ gegeben sei, wobei $N_{e,0} \gg N_{d,0}$ gelten möge. Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Ladungsneutralität die Zahl N_e der freien Elektronen im Leitungsband.

Zeigen Sie, dass für niedrige Temperaturen $N_e = \sqrt{N_{e,0}\,N_{d,0}}\,\exp\left(-\beta\,(E_g - E_d)/2\right)$ gilt, während sich für hohe Temperaturen $N_e = N_{d,0}$ ergibt.

Skizzieren und diskutieren Sie N_e und μ als Funktion der Temperatur.

Aufgabe 23: Schwarzkörperstrahlung (2 Punkte)

Betrachten Sie einen hohlen Kasten, der mit einem Photonengas der Temperatur T gefüllt sei. Eine Wand des Kastens habe ein (infinitesimal kleines) Loch der Größe $d\,A$, aus dem Strahlung austrete. Bestimmen Sie die Intensität der Strahlung, und zwar als Funktion der Wellenlänge λ und des Winkels θ zur Normalen der Wand ($\theta = 0$: Strahlung tritt senkrecht aus; $\theta = \pi$: „streifendes" Austreten). Wie hoch ist die gesamte Abtrahl-Intensität aus dem Loch?

Hinweis: $$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,d\,x = \frac{\pi^4}{15}$$