

**Aufgabe 15: Großkanonische Gesamtheit****(4 Punkte)**

- a) Gegeben sei ein ideales Gas in einem Volumen  $V$ . Berechnen Sie für dieses System im Rahmen der klassischen Physik die Zustandssumme  $Z_{GK}$  der großkanonischen Gesamtheit und daraus das großkanonische Potenzial. Verwenden Sie das Potenzial, um den Druck  $p(T, V, \mu)$ , die Entropie  $S(T, V, \mu)$  und die mittlere Teilchenzahl  $N(T, V, \mu)$  zu bestimmen.
- b) Die mittlere Teilchenzahl lässt sich auch aus

$$N = \langle \tilde{N} \rangle = \sum_{\tilde{N}=0}^{\infty} \tilde{N} \frac{e^{\beta \mu \tilde{N}} Z_K(\tilde{N})}{Z_{GK}} := \sum_{\tilde{N}=0}^{\infty} \tilde{N} w(\tilde{N})$$

bestimmen. Dabei ist  $Z_K(\tilde{N})$  die *kanonische* Zustandssumme für  $\tilde{N}$  Teilchen. [Beachten Sie, dass hierbei  $\tilde{N}$  eine „aktive Variable“ darstellt, während  $N (= \langle \tilde{N} \rangle)$  ein Mittelwert ist.] Zeigen Sie, dass die oben auftretende Wahrscheinlichkeits-Verteilung  $w(\tilde{N})$  (d. h. die Wahrscheinlichkeit,  $\tilde{N}$  Teilchen im System vorzufinden) durch eine Poisson-Verteilung gegeben ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus a).

- c) Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 7) die Schwankung  $\Delta N := \sqrt{\langle \tilde{N}^2 \rangle - \langle \tilde{N} \rangle^2}$  und die relative Abweichung  $\frac{\Delta N}{N}$ .

**Aufgabe 16: Mittlere Besetzungszahlen****(3 Punkte)**

Berechnen Sie für ein ideales Quantengas (aus Bosonen bzw. aus Fermionen) die mittlere quadratische Schwankung in den Ein-Teilchen-Besetzungszahlen,

$$(\Delta n_j)^2 := \langle \hat{n}_j^2 \rangle - \langle \hat{n}_j \rangle^2 .$$

**Aufgabe 17: Zustandsdichte in der Quantenmechanik****(3 Punkte)**

Betrachten Sie ein freies Teilchen in einer, zwei oder drei Dimensionen. Die Dispersionsrelation sei durch  $E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$  (quadratische Dispersion) bzw.  $E(k) = c \cdot k$  (lineare Dispersion) gegeben.

Bestimmen Sie für jeden der sechs Fälle die Zustandsdichte  $Z(E)$  und skizzieren Sie sie (als Funktion von  $E$ ). [Spin-Entartungen etc. sollen hier vernachlässigt werden.]