3. Übung zur Statistischen Physik (SS 2013) **Prof. Rohlfing**
Ausgabedatum: 23.04.2013 Abgabedatum: 30.04.2013

Aufgabe 6: Entropie des idealen Gases (6 Punkte)

Betrachten Sie zwei ideale einatomige Gase 1 und 2 (z. B. Helium und Argon) mit anfänglichen Zustandsgrößen ($E_1^{(0)}$, $V_1^{(0)}$, $N_1^{(0)}$) bzw. ($E_2^{(0)}$, $V_2^{(0)}$, $N_2^{(0)}$). Die beiden Gase seien durch eine teilchenundurchlässige Trennwand getrennt. Jedes Gas sei für sich betrachtet im thermodynamischen Gleichgewicht.

a) Zeigen Sie (unter Verwendung der Ihnen bekannten Entropie-Ausdrücke $S_i\,(E_i,\, V_i,\, N_i)$ und der resultierenden Zustandsgleichungen für jedes der beiden Gase), dass die Gesamtentropie $S_{\text{ges}} = S_1 + S_2$ maximal wird, wenn (bei wärmedurchlässiger, aber starrer Wand) beide Teilsysteme die gleiche Temperatur T annehmen. Bestimmen Sie T, die ausgetauschte Wärme $\Delta\, Q_1$ ($= -\Delta\, Q_2$) und die Zunahme der Entropie (Letzteres zur Vermeidung komplizierter Ausdrücke als Abschätzung mittels Taylor-Entwicklung).

b) Zeigen Sie analog, dass die Gesamtentropie maximal wird, wenn (bei verschiebbarer und wärmedurchlässiger Wand) beide Teilsysteme die gleiche Temperatur T und den gleichen Druck p annehmen. Bestimmen Sie p und T, die ausgetauschte Wärme, die Volumenänderung und die Zunahme der Entropie (Letzteres zur Vermeidung komplizierter Ausdrücke als Abschätzung mittels Taylor-Entwicklung).

c) Nehmen Sie nun der Einfachheit halber an, dass anfänglich

$$E_1^{(0)} = E_2^{(0)}\,, \qquad V_1^{(0)} = V_2^{(0)} \qquad \text{und} \qquad N_1^{(0)} = N_2^{(0)}$$

sei. Nun werde die Trennwand entfernt, so dass sich die beiden Gase durchmischen. Nach der Durchmischung sei die Entropie immer noch durch die Summe der Einzelentropien der beiden Gase gegeben ($S_{\text{ges}} = S_1 + S_2$; ohne Beweis). Bestimmen Sie die Entropiezunahme („Mischungsentropie“).

d) Die Mischungsentropie führt zum Gibbs'schen Paradoxon, wonach beim Entfernen einer (auch gedanklichen) Wand zwischen zwei gleichartigen Gasen die Entropie um die Mischungsentropie ansteige. Untersuchen Sie diese Situation, indem Sie die statistisch hergeleitete Entropie aus der Vorlesung verwenden, vereinfacht:

$$S\,(E,\, V,\, N) = k_B\, \ln\left[\alpha^N\, V^N\, E^{3N/2}\, /\, (3N/2)!\, \cdot\, \beta\right]\,.$$

Hierin sei β der „Ununterscheidbarkeitsfaktor“: $\beta = 1/N!$ für N gleichartige Teilchen; $\beta = 1/(N_1!\, N_2!)$ für zwei Teilchensorten mit $N = N_1 + N_2$. Verwenden Sie die Stirling-Näherung für die Fakultäten (für unsere Zwecke genügt hier $\ln(k!) \approx k \ln k - k$). Zeigen Sie, dass mit diesem Ausdruck für die Entropie für verschiedenartige Gase die Mischungsentropie aus c) reproduziert wird, dass aber für eine einzelne Teilchenart keine Mischungsentropie und damit auch kein Gibbs'sches Paradoxon auftritt.

Aufgabe 7: **Wahrscheinlichkeits-Verteilungen** **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden drei Wahrscheinlichkeits-Verteilungen den Normierungs-Vorfaktor α, den Mittelwert, und die Standardabweichung (= mittlere quadratische Abweichung). Skizzieren Sie jeweils die Wahrscheinlichkeits-Verteilung.

a) Binomial-Verteilung (diskret): $P_n(j) = \alpha \cdot \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{(n-j)}$ (= Wahrscheinlichkeit, dass z. B. bei n-maligem Durchführen eines Experiments j-mal ein Ereignis eintritt, welches beim einmaligen Durchführen mit Wahrscheinlichkeit p auftritt).

b) Poisson-Verteilung (diskret): $P(j) = \alpha \cdot \lambda^j / j!$ (= Wahrscheinlichkeit, dass z. B. bei festgelegter Gesamtlaufzeit eines Experiments ein Ereignis, das unabhängig voneinander beliebig oft auftreten könnte, j-mal auftritt).

c) Gauß-Verteilung (kontinuierlich): $P(x) = \alpha \cdot \exp\left[-(x - x_0)^2/(2\,\sigma^2)\right]$.