5. Übung zur Festkörpertheorie II - SS 2013 — Prof. Krüger

Ausgabedatum: 04.07.2013 — Abgabedatum: 11.07.2013

Aufgabe 13: Polaron (4 Punkte)

Ein Elektron, das sich durch einen Ionenkristall bewegt, wechselwirkt mit den optischen Phononen. Der Wechselwirkungsoperator hat nach einer kanonischen Transformation die Gestalt

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\sigma}\sum_{\vec{q}\vec{q}\,'}\Big(A(\vec{k},\vec{q})\ (\hat{a}_{\vec{q}}\ \hat{a}_{\vec{q}\,'} + \hat{a}_{\vec{q}}\ \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}\,'}) + B(\vec{k},\vec{q})\ (\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}}\hat{a}_{\vec{q}\,'} + \hat{a}^{\dagger}_{-q}\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{q}\,'})\Big)\cdot$$

$$\cdot W(\vec{q})W(\vec{q}\,')\ (\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q}+\vec{q}\,'\sigma}\ \hat{c}_{\vec{k}\sigma} - \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}\ \hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}\,'\sigma})\ +\ \delta_{\vec{q},\vec{q}\,'}\ \Big|W(\vec{q})|^2\ \big(B(\vec{k},\vec{q}) - A(\vec{k},\vec{q})\big)\ \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}\hat{c}_{\vec{k}\sigma}$$

.

Dabei sind

$$A(\vec{k},\vec{q}) = \frac{-1}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\omega_{LO}} \quad \text{und} \quad B(\vec{k},\vec{q}) = \frac{-1}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} + \hbar\omega_{LO}} \quad \text{mit } \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Das Wechselwirkungsmatrixelement ist durch $W(\vec{q}) = -i\frac{\gamma}{q}$ gegeben. Dabei ist γ eine reelle Konstante.

a) Berechnen Sie den Energiebeitrag E_1 von $\hat{H}_1$ in erster Ordnung der Störungstheorie. Gehen Sie dabei von einem Produktzustand $|\Psi> \ = |\Phi>_{el}\ |\chi>_{ph}$ aus, der ein Elektron mit Wellenvektor $\vec{k}$ und keine Phononen enthält.

$|\Phi>_{el} = \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}|0>_{el}$ und $|\chi>_{ph}\ =\ |n_{\vec{q}} = 0>_{ph}$

Zeigen Sie, dass diese Energie folgende Form hat

$$E_1 = \sum_{\vec{q}}\ \frac{|W(\vec{q})|^2}{\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \hbar\omega_{LO}}\ .$$

b) Werten Sie die verbleibende Summe über $\vec{q}$ durch Übergang zu einem Integral aus. Ersetzen Sie zur analytischen Auswertung die Integration über die erste Brillouinzone durch ein Integral über den ganzen $\vec{q}$ Raum.

c) Analysieren Sie Ihr Endergebnis im Grenzfall kleiner Wellenvektoren $\vec{k}$. Führen Sie dazu eine Taylorentwicklung durch. Was können Sie aus dem quadratischen Term über die Änderung der effektiven Elektronenmasse durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung sagen?

Nützliches Integral: $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\ ln\left|\frac{a^2+2bx+x^2}{a^2-2bx+x^2}\right| dx\ =\ 2\ \pi\ arcsin\frac{b}{a}$$

Aufgabe 14 : Der Effekt des Fermisees beim Cooper-Paar (3 Punkte)

Die Energie der Cooper-Paare wird bei T=0 durch

$$1 \;=\; V \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\vec{k}} - \lambda} \qquad \text{mit} \qquad V > 0 \qquad \text{und} \qquad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

bestimmt. Dabei läuft $\vec{k}$ über alle Zustände mit $E_F \leq \epsilon_k \leq \hbar\omega_D$. Nehmen Sie in dieser Aufgabe an, dass $E_F = 0$ ist, d.h. „der Fermisee ist leer“.

a) Zeigen Sie, dass in drei Dimensionen nicht für alle Werte von V ein gebundener Zustand (also $\lambda < 0$) existiert. Berechnen Sie die kritische Wechselwirkungsstärke V_c, oberhalb derer immer ein gebundener Zustand auftritt.

b) Was gilt im eindimensionalen Fall?

Aufgabe 15 : Supraleitender Stab (3 Punkte)

Die Stromdichte $\vec{j}$ hängt in einem Supraleiter über

$$\vec{j} = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{A}(\vec{r})$$

vom Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ ab. Dabei gibt n_s die Dichte der supraleitenden Elektronen an.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen für den *statischen* Fall, dass in einem Supraleiter die Helmholtz-Gleichung für das Magnetfeld gilt

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{n_s e^2}{m} \vec{B}(\vec{r}) \ .$$

b) Lösen Sie die Helmholtz-Gleichung für einen supraleitenden Stab der Breite $2a$, der sich in einem Magnetfeld befindet. Außerhalb des Stabes herrsche ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ in z-Richtung. Vernachlässigen Sie im Stab die y- und z-Abhängigkeit des Feldes. Nehmen Sie $\vec{B} = \vec{B}(x)$ mit $\vec{B}(-a) = \vec{B}_0 = \vec{B}(a)$ an. Skizzieren Sie das berechnete Magnetfeld $\vec{B}(x)$.

c) Berechnen Sie die y-Komponente der Stromdichte und skizzieren Sie Ihr Ergebnis.