Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 13

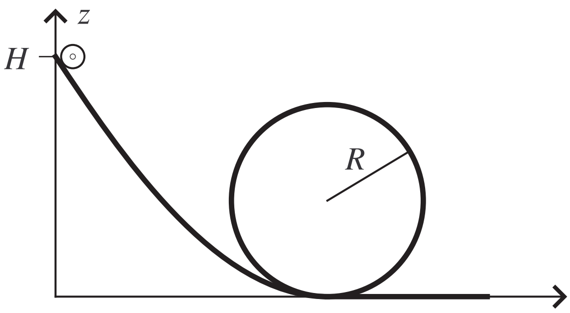
mündlich: 14. oder 15.01.19
schriftlich: 17. oder 18.01.19

Aufgabe 56: Looping-Bahn (5 Punkte, schriftlich)

Eine Kugel mit Radius r und Masse m rolle auf einer Looping-Bahn unter dem Einfluss der Schwerkraft.

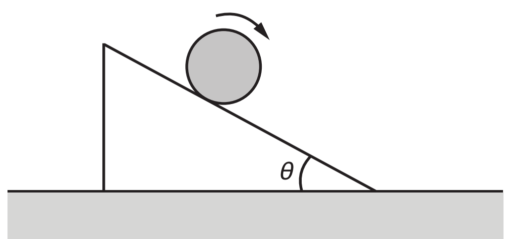
(a) (4 Punkte) Auf welcher Höhe H muss sich der Schwerpunkt der Kugel beim Start mindestens befinden, damit sie eine Schleife mit dem Radius R durchlaufen kann, ohne dabei aus der Bahn zu fallen?

(b) (1 Punkt) Auf welcher Höhe muss sich der entsprechende Startpunkt befinden, wenn die Kugel auf der Bahn *gleitet* und nicht rollt?



Aufgabe 57: Rolle auf einer schiefen Ebene (10 Punkte, mündlich)

Ein Zylinder der Masse M und mit Radius R rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene herunter. Der Winkel zwischen der Ebene und der Horizontalen ist θ, das Trägheitsmoment des Zylinders um die Symmetrieachse ist $I = \frac{1}{2}mR^2$ und der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Zylinder und der schiefen Ebene ist μ.



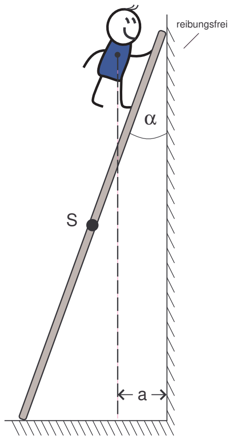
(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle relevante Kräfte, die die Bewegung des Zylinders bestimmen und zeichnen Sie diese in eine Skizze ein. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Beschleunigung des Zylinders und bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Zylinders am unteren Ende der schiefen Ebene, wenn der Zylinder aus der Ruhe in der Höhe H losgelassen wird.

(c) (3 Punkte) Wie groß ist der maximale Winkel zwischen der schiefen Ebene und der Horizontalen, so dass der Zylinder immer noch ohne zu gleiten rollt?

Aufgabe 58: Leiter **(6 Punkte, schriftlich)**

Eine Leiter der Länge $L = 5$ m und der Masse $m = 40$ kg lehnt unter einem Winkel $\alpha = 20°$ (siehe Abbildung) an einer glatten Wand. Der Schwerpunkt der Leiter befindet sich in ihrem Mittelpunkt. Zwischen dem Boden und dem unteren Ende der Leiter besteht Haftreibung mit einem Haftreibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$. Eine Person mit der Masse $M = 80$ kg klettert die Leiter hinauf. Welchen Abstand a von der Wand darf der Schwerpunkt der Person nicht unterschreiten, damit die Leiter nicht ins Rutschen kommt?



Aufgabe 59: Gravitationspotential **(7 Punkte, schriftlich)**

Ein Körper der Masse m befinde sich im Gravitationspotential der Erde

$$V(r) = -\frac{mMG}{r} \; .$$

Dabei ist r der Abstand des Körpers vom Mittelpunkt der Erde. In der Nähe der Erdoberfläche ist es sinnvoll, das Potential in Abhängigkeit von der Höhe z über der Oberfläche darzustellen. Der Abstand vom Erdmittelpunkt hat dann die Form $r = R + z = R(1 + \frac{z}{R})$. Dabei ist R der Erdradius.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass sich das Gravitationspotential für $z \ll R$ in der Form

$$V(z) = -mK + mgz - \frac{mg}{R}\, z^2 + \ldots$$

schreiben lässt. Setzen Sie dazu $\frac{z}{R} = x$ und berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Drücken Sie die Konstanten K und g durch M, G und R aus.

(b) (2 Punkte) Der Radius der Erde R beträgt 6378 km. Welcher Wert für g ergibt sich bei einer Erdmasse $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und einer Gravitationskonstanten $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2? Warum können der Term $\frac{m\,g}{R}\, z^2$ und alle höheren Terme im Potential für Abstände bis zu 1 km oberhalb der Erdoberfläche “in guter Näherung” vernachlässigt werden?

(c) (1 Punkt) Welche Gravitationskraft (in z-Richtung) ergibt sich aus dem Potential $V(z) = mK + mgz$?

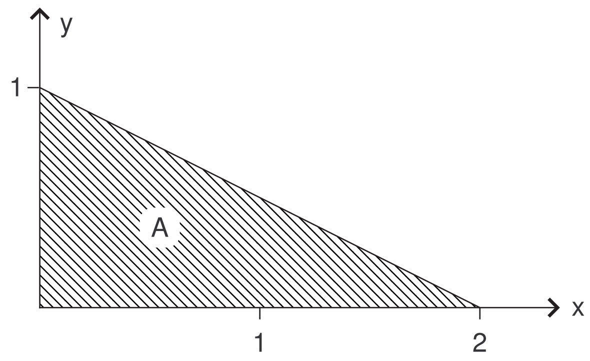
Aufgabe 60: Mehrfache Integrale und Schwerpunkt **(13 Punkte, mündlich)**

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie für die durch das Quadrat $1 \le x \le 2$ und $1 \le y \le 2$ gegebene Fläche A die Integrale

$$I_1 = \int_A dx\, dy \qquad \text{und} \qquad I_2 = \int_A \frac{1}{x+y}\, dx\, dy \; .$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie für die in der folgenden Skizze gegebene Fläche A die Integrale

$$I_3 = \int_A dx\, dy \qquad \text{und} \qquad I_4 = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\ .$$



(c) (7 Punkte) Berechnen Sie den Schwerpunkt eines halben Kreisrings mit Außenradius R_a, Innenradius R_i und Dicke d. In z-Richtung erstrecke sich der Ring von $-d/2$ bis $d/2$. Die Massendichte sei konstant. Geben Sie den berechneten Schwerpunkt in kartesischen Koordinaten an. Die Durchführung der Volumenintegration kann zweckmäßigerweise in Zylinderkoordinaten erfolgen.