2) Extensionale Interpretation

Ähnlich wie in der Aussagenlogik interessieren wir uns in der Prädikatenlogik in der Regel jedoch nicht für den Sinn einer Aussage bzw. die Bedeutungen von Prädikaten und Namen. Es kommt uns auf die logische Form (d.h. auf diejenige Komponente einer Aussage, die für die Korrektheit eines Schlusses, in die die Aussage eingeht, relevant sind) und ihre Wahrheitsdefinitheit an.

Um prädikatenlogische Formeln, die keinen Wahrheitswert besitzen, in wahrheitsdefinite Aussagen zu verwandeln, müssen wir nicht die bei der Ermittlung der prädikatenlogischen Form einer Aussage gemachten Abstraktionsschritte durch eine *intensionale* Interpretation *vollständig* rückgängig machen. Es reicht aus, wenn wir – wie bereits in der Aussagenlogik – eine *extensionale* Interpretation anstreben, die der Formel einen Wahrheitswert zuordnet. In der Prädikatenlogik funktioniert dies allerdings nicht durch die Zuweisung von Wahrheitswerten zu Satzbuchstaben. Wir müssen vielmehr eine Reihe von extensionalen Interpretationsschritten vollziehen.

Betrachten wir dazu erneut die oben bereits angeführte prädikatenlogische Form, die aus dem Satz „Manche Menschen spielen Schach; auch Anton spielt Schach." hervorgegangen ist:

$\exists x\ (Mx \wedge Sx) \wedge Sa$

1) **Zunächst muss man den Individuenbereich angeben, d.h. die Menge der Individuen, die die Variablen der prädikatenlogischen Formel durchlaufen sollen. Durch den Individuenbereich wird des Weiteren festgelegt, welchen Individuen Prädikate zu- und abgesprochen werden können und auf welche Individuen sich Individuenbuchstaben beziehen.**

Die minimale Angabe besteht darin, eine bis auf die Anzahl ihrer Elemente unspezifizierte Menge anzugeben:

Individuenbereich$_x$: {a_1, a_2, a_3, ... a_9}

2) **Falls es sich – wie in unserem Beispielfall – um eine offene Formel handelt, sind den Individuenbuchstaben Elemente aus dem zuvor festgelegten Individuenbereich zuzuordnen, und zwar jedem Individuenbuchstaben ein bestimmtes Element.**
Im Beispielfall taucht in der Formel ein Individuenbuchstabe, nämlich „a“, auf. Wir können in einer extensionalen Interpretation der Formel also beispielsweise festlegen, dass sich „a“ auf das Individuum a_7 aus dem angegebenen Individuenbereich beziehen soll. Wir halten dies wie folgt fest:

a: a_7

3) **Nun müssen wir uns um die in unserer Formel auftauchenden Prädikatbuchstaben kümmern. Um bei einem Ausdruck wie „Sa“ etwas über den Wahrheitswert sagen zu können, muss man wissen, ob das Individuum aus dem festgelegten Individuenbereich, auf das sich der Individuenbuchstabe „a“ bezieht, in der *Extension* des einstelligen Prädikats liegt, das mit „S“ bezeichnet wird.**
(Wir erinnern uns: Die Extension eines einstelligen Prädikats ist die Menge der Individuen, auf die das Prädikat zutrifft.)
Um dies beurteilen zu können, müssen wir nicht die *Intension*, also die Bedeutung des Prädikats kennen. Es reicht aus zu wissen, auf welche der im Individu-

enbereich liegenden Individuen das Prädikat zutrifft. Wir können also den Prädikatbuchstaben „S“ in obiger Formel extensional interpretieren, indem wir ihm eine bestimmte Teilmenge des bereits festgelegten Individuenbereichs zuordnen, beispielsweise:

S: {a_1, a_3, a_5, a_7}

Analog verfahren wir mit dem Prädikatbuchstaben „M“:

M: {a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9}

Eine Komplikation ergibt sich für Prädikatbuchstaben, die als Platzhalter für mehrstellige Prädikate fungieren. Hier besteht die extensionale Interpretation darin, dem fraglichen Prädikatbuchstaben die Menge aller n-Tupel zuzuordnen, die unter ein bestimmtes n-stelliges Prädikat fallen. Einem Prädikatbuchstaben, der ein Platzhalter für ein n-stelliges Prädikat ist, wird also die Extension eines bestimmten n-stelligen Prädikats zugewiesen. Die Individuen, die in den betreffenden n-Tupeln auftauchen, stammen wiederum aus dem zuvor festgelegten Individuenbereich.
(Eine extensionale Interpretation der Formel „Fab“ besteht beispielsweise in der Festlegung eines Individuenbereichs Zuordnung zweier Elemente zu den Individuenbuchstaben „a“ und „b“ und der Zuordnung der Menge aller geordneten Paare, auf die das Prädikat „Fxy“ zutrifft.)

Geben wir für die obige Beispielformel „$\exists x\ (Mx \wedge Sx) \wedge Sa$" nun eine mögliche extensionale Interpretation an:

Individuenbereich$_x$: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_9\}$

a: a_7

M: $\{a_1, a_3, a_5, a_7\}$

S: $\{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$

Unter dieser extensionalen Interpretation ist die Formel wahr, denn es gibt mindestens ein Element aus der Individuenbereichsmenge, das zugleich Element der Extension von M sowie S ist, und a_7 ist in der Extension von S.

> **<u>Definition 36:</u>**
>
> **Eine extensionale Interpretation einer prädikatenlogischen Formel besteht aus der Angabe einer Menge B als Individuenbereich, der Zuordnung von Elementen aus B zu den Individuenbuchstaben und der Zuordnung von Prädikatextensionen zu den Prädikatbuchstaben; dabei müssen gleichen Buchstaben gleiche Elemente bzw. Teilmengen zugeordnet werden.**