Physik in der Schule 32/2, 55 (1994) (181)

# Zur Energetik des „springenden Hasen“

H. Joachim Schlichting

## Springen aus dem Stand

Wovon hängt die Höhe ab, die man beim Sprung aus dem Stand erreicht? Zum einen hängt sie von der Energie, die ein aus der Hocke hochschnellender Mensch auf der kurzen Strecke der Beschleunigung seinem Körper erteilt. Um diese Energie aber in optimaler Weise entfalten, d.h. in kinetische Energie des Springers umwandeln zu können, ist zum anderen von Bedeutung, wie der Springer sich vom Boden abzustoßen vermag, d.h. in welcher Weise der Impulsaustausch mit der Umgebung erfolgt.

## Springendes Spielzeug

Die Energetik und Dynamik des Sprungs aus dem Stand läßt sich sehr schön anhand eines kleinen Spielzeugs untersuchen. Das Spielzeug besteht aus einer Figur, die über eine Schraubenfeder mit einem Fuß verbunden ist (Bild 1). Damit die Figur springen kann, muß man die Feder spannen, indem man Ober- und Unterteil zusammendrückt. Dieser Vorgang entspricht dem Niederhocken beim Sprung aus dem Stand. Das Spielzeug erhält dadurch neben der Möglichkeit zur Beschleunigung des eigenen Körpers elastische Energie E, aus der die kinetische bzw. potentielle Energie des Sprungs gespeist wird.

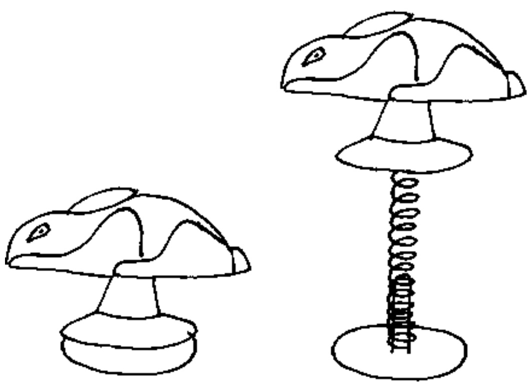

Bild 1: Springer in gespannter (links) und entspannter Lage

Damit man das Spielzeug nach dem Zusammendrücken in Ruhe loslassen und es ohne Störung aus sich heraus den Sprung ausführen kann, ist es mit einem Verzögerungsmechanismus versehen, der Ober- und Unterteil nach dem Zusammendrücken eine Zeit lang arretiert. Der Mechanismus, eine zähe, klebrige Masse oder ein Saugnapf, soll uns hier nicht weiter interessieren. Man ist erstaunt, wie hoch die Figur springt.

Aus der Sprunghöhe *h* kann man die potentielle Energie berechnen, die das Spielzeug von der sich entspannenden Feder erhält. Offenbar kann selbst im Idealfall der Reibungsfreiheit nicht die gesamte elastische Energie in potentielle Energie verwandelt werden. Davon überzeugt man sich, wenn man den Hasen auf dem Rücken, also mit dem schweren Oberteil nach unten springen läßt. Auch wenn man durch ein passendes festes Gegenlager sorgt, beträgt die Sprunghöhe *h'* in diesem Fall nur einen Bruchteil von *h*. Durch systematische Variation der Masse $m_1$ des Oberteils und $m_2$ des Unterteils durch Anbringen von Zusatzmassen (z.B. in Form von Plastilin) gewinnt man die zunächst nur qualitative Einsicht, daß bei gegebener Gesamtmasse m die Sprunghöhe umso höher ist, je kleiner $m_1$ und je größer $m_2$ ist.

Um diesen Sachverhalt physikalisch zu verstehen, machen wir uns zunächst klar, daß die Entspannung der Feder zwar notwendig für die Umwandlung der elastischen Energie in kinetische bzw. potentielle Energie ist aber nicht hinreichend. Legt man den Springer mit gespannter Feder beispielsweise auf die Seite, so bewegt sich das Spielzeug nur etwas auf der Stelle hin- und her. Die gesamte elastische Energie wird dabei dissipiert. Daraus erkennt man, die Bedeutung des "Abdrückens" auf der Unterlage als Voraussetzung für den Sprung. Um elastische Energie in potentielle Energie umwandeln zu können, muß das Spielzeug Gelegenheit haben, Impuls auf die Umgebung übertragen zu können. Beim liegenden Spielzeug schnellen Ober- und Unterteil in entgegengesetzter Richtung auseinander und "ziehen" gleichstark aneinander. Physikalisch gesprochen heben sich die Impulse beider Teile auf:

$$P_1 - P_2 = 0. \qquad (1)$$

Die freiwerdende elastische Energie muß daher infolge inelastischer Schwingungen der Feder dissipiert werden.

Steht der Springer jedoch ordnungsgemäß auf dem Boden, so wird die Symmetrie des Vorgangs gebrochen. Während das Oberteil durch die sich entspannende Feder nach oben beschleunigt und mit Bewegungsenergie versehen wird, bleibt das Unterteil in Ruhe. Es drückt gegen den Boden, der davon allerdings insofern "unbeeindruckt" bleibt, als er weder in Bewegung gesetzt noch verformt wird, also keine Energie aufnimmt. Da sich das Unterteil auf diese Weise nicht in die Richtung, in die es gedrückt wird, fortbewegen kann, "zieht" es auch nicht an dem nach oben fliegenden Oberteil, denn es kann durch den Druck auf den Boden seinen Impuls $P_1 = m_1 \cdot v_1$ loswerden. Das Oberteil kann daher seinen Impuls $P_2 = m_2 \cdot v_2$ behalten und den Flug fortsetzen. Dabei muß es allerdings das Unterteil mit der Masse $m_2$ mitnehmen, wodurch es zu einer Verkleinerung der Absprunggeschwindigkeit kommt. Da das Unterteil bei festem Boden völlig unbewegt bleibt, wird - bei Reibungsfreiheit und Vernachlässigung der Federmasse- zunächst die gesamte elastische Energie $E$ in kinetische Energie des Oberteils verwandelt:

$$E = 1/2\ m_1 v^2_1.$$

In dem Augenblick jedoch, in dem das gesamte Spielzeug abhebt, muß vom hochschnellenden Oberteil die gesamte Masse, also $m = m_1 + m_2$ fortgetragen werden. Infolgedessen verringert sich die Geschwindigkeit gemäß

$$m_1 \cdot v_1 = m\ v \qquad \text{von } v_1 \text{ auf}$$

$$v = v1 \cdot m1/m.$$

Die Geschwindigkeit $v$ beim Abheben des Spielzeugs verhält sich zur Geschwindigkeit $v_1$ des Oberteils wie die Gesamtmasse zur Masse des Oberteils. Sie ist daher umso kleiner, je größer der Anteil der Masse des Unterteils an der Gesamtmasse ist. Infolgedessen verringert sich die kinetische Energie auf

$$E_k = ½ \cdot m\ v^2.$$

Die Differenz

$$E - E_k = ½ \cdot m_1 v^2_1 (1 - m_1 /m)$$

geht durch Dissipation verloren und ist umso kleiner je kleiner die Masse des Unterteils $m_2$ im Vergleich zur Masse des Oberteils $m_1$ ist. Die Energieverluste aufgrund der Impulsbilanz ließen sich daher nur im Grenzfall $m_2 = 0$ vermeiden. Dann wäre auch eine von anderen Reibungsverlusten abgesehen vollständige Umwandlung der elastischen in kinetische bzw. potentielle Energie möglich.

Da die potentielle Energie aus der kinetischen hervorgeht

$$E_p = E_k, \qquad (2)$$

ist mit dem impulsbedingten Energieverlust auch eine Abnahme der Sprunghöhe verbunden:

$$h = v^2/2g$$

Gibt es unter diesen Voraussetzung dennoch eine Möglichkeit, die elastische Energie aus der Sprunghöhe abzuschätzen?

Da die Messung von $v$ und erst recht von $v_1$ schwierig ist, ersetzen wir die Geschwindigkeit durch einen nur von der Masse und der Energie abhängigen Ausdruck, den wir aufgrund der folgenden Identität gewinnen:

$$E = 1/2\ m_1 v^2_1 = m^2 v^2/2m_1 ,$$

also

$$v^2 = 2Em_1 /m^2.$$

Damit ergibt sich ein funktionaler Zusammenhang zwischen $h$ und $E$, der nur von der Masse des Oberteils und der Gesamtmasse abhängt:

$$h = E\ m_1 /m_2 /g. \qquad (3a)$$

Einen entsprechenden Ausdruck erhält man für die Sprunghöhe $h'$ des auf dem Kopf stehenden Spielzeugs:

$$h' = E\ m_2 /m^2/g. \qquad (3b)$$

Addiert man die Gl.(3a) und (3b), so erhält man einen nur noch von der elastischen Energie und der Gesamtmasse des Spielzeugs abhängigen Ausdruck:

$$E = m\ g\ H , \qquad (4)$$

wobei $H = h + h'$ ist.

Ersetzt man die Sprunghöhe h des Springers durch H, so kann man durch Messung der von h und h' die elastische Energie des Spielzeugs abschätzen, ohne Rücksicht auf die meistens der Messung unzugänglichen Teilmassen $m_1$ und $m_2$ nehmen zu müssen.

## Quantitative Abschätzung

Da die Sprunghöhe des Spielzeugs relativ stark variiert (von 80 cm bis 120 cm), haben wir außer der Ermittlung eines Mittelwertes aufgrund mehrerer Messungen Sprunghöhen gemessen, bei denen das Spielzeug mit verschiedenen am Oberteil angebrachten Zusatzmassen (Plastilin) ausgestattet wurde, und auf diese Weise mit Hilfe von Gl. (4) mehrere unabhängige Werte für die elastische Energie $E$ erhalten (siehe Tabelle).

Konkret haben wir die Masse des Spielzeugs von $m = 14\ g$ (keine Zusatzmasse) bis $m = 42\ g$ (38 g Zusatzmasse) in zehn Schritten variiert. Die aus jeweils drei Messungen gemittelten Werte sind in der Tabelle enthalten.

| h /m | h'/m | m/g | E/J |
|---|---|---|---|
| 1,05 | 0,35 | 14 | 0,25 |
| 0,96 | 0,29 | 16 | 0,20 |
| 0,84 | 0,22 | 18 | 0,19 |
| 0,65 | 0,15 | 20 | 0,16 |
| 0,58 | 0,11 | 22 | 0,15 |
| 0,50 | 0,09 | 24 | 0,14 |
| 0,43 | 0,08 | 26 | 0,13 |
| 0,38 | 0,03 | 32 | 0,13 |
| 0,33 | 0,00 | 37 | 0,12 |
| 0,29 | 0,00 | 42 | 0,12 |

Zu erwarten gewesen wäre ein konstanter Wert für *E*. Durch die großen Zusatzmassen wurde jedoch die Stabilität des Sprungs gestört, was vermutlich zu zusätzlicher Energiedissipation führte. Die Tabelle zeigt, daß bei sehr großer Zusatzmasse, der Kopfsprung überflüssig wird und die impulsbedingten Energieverluste immer kleiner werden. Allerdings sind hier die Fehler aufgrund der Zusatzmasse so erheblich, daß man zu einer noch besseren Abschätzung der elastischen Energie kommt, wenn man sie gleich der aus der aus der Sprunghöhe h ermittelten potentiellen Energie des unveränderten Spielzeugs setzt, also alle Einflüsse des Impulses vernachlässigt. Diese beträgt im vorliegenden Fall 0,15 J.

## Ein alternativer Zugang zur elastischen Energie

Diese Ergebnisse werden sehr stark relativiert durch die Tatsache, daß die in diesen Abschätzungen vernachlässigten Reibungsverluste sehr viel stärker zu Buche schlagen, als die Verluste durch den Impulsübertrag. Davon überzeugt man sich, wenn man die elastischen Energie durch eine von der gemessenen Höhe unabhängige Methode abschätzt:

Wir pressen das Spielzeug auf einer Personenwaage als Unterlage zusammen. Während des Zusammendrückens steigt die auf die Waage einwirkende Gewichtskraft bis zur vollständigen Spannung der Feder auf einem Maximalwert $F_m$ an. Die Waage zeigt allerdings nur die der Gewichtskraft $F_m$ entsprechende Masse $M$ an. Im vorliegenden Fall lesen wir $M = 2{,}25\ kg$ ab. Dem entspricht $F_m = Mg = 22{,}5\ N$. Geht man davon aus, daß während des Zusammendrückens die Kraft linear von $0$ auf $F_m$ ansteigt, so kann man von einer mittleren konstanten Kraft $F = (0 + 22{,}5)/2\ N = 11{,}25\ N$ ausgehen, die während der Verkürzung der Feder des Spielzeugs von 7,9 cm auf 3,9 cm, also um / = 4 cm wirkt. Die Spannenergie beträgt also

$E_s = F\ /\ = 0{,}45\ J.$

Das ist immerhin mehr als das Doppelte des Wertes unserer optimistischsten Höhenmessung.

## Fazit: Der Weg ist das Ziel

Spielzeuge sind keine idealen Energiewandler. Das Ergebnis ist vermutlich weder überraschend noch besonders wichtig. Der Weg dahin hat uns aber einige schöne Experimente und interessante physikalische Einsichten beschert.