

SINIS – Simulation nichtlinearer Systeme

O.Busse, V. Nordmeier, H.J. Schlichting Universität Münster

Kurzfassung

Das Programm SINIS dient zur Simulation nichtlinearer Systeme. Die Ergebnisse werden als Zeitreihe und im zweidimensionalen Phasenraum dargestellt, der zusätzlich in einer dreidimensionalen Darstellung betrachtet werden kann. Das Potential der Systeme kann ausgegeben und es können Poincaréschnitte angefertigt werden, deren Abhängigkeit von der Phasenlage aus der Poincaré-Animation hervorgeht. Die Bifurkationsszenarien können mit Feigenbaumdiagrammen untersucht werden. Zur weiteren Auswertung der mit SINIS erhaltenen Ergebnisse können alle erstellten Diagramme in drei verschiedenen Formaten und die ihnen zu Grunde liegenden Daten im Textformat abgespeichert werden. Hier werden die Ergebnisse der Simulation des Exzentrischen Drehpendels kurz dargestellt. Der Übergang vom geordneten Zustand über chaotische Zustände wieder in einen geordneten Zustand wird demonstriert. Die Abhängigkeit des Poincaréschnitts von der Phasenlage wird gezeigt. Ein 32er-Zyklus wird in Zeit-, Phasendiagramm und Poincaréschnitt betrachtet.

1. Einleitung

Innerhalb der physikalischen Forschung ist die numerische Simulation ein wichtiger Bestandteil und ebenso ein grundlegendes Hilfsmittel zur Erkenntnisgewinnung. Mit ihr können reale Systeme untersucht werden, deren Verhalten in der Realität nicht oder nicht genau genug betrachtet werden kann, da Experimente entweder nicht durchführbar sind oder zu schnell bzw. zu langsam für Beobachtungen ablaufen. Durch die Simulation dieser Systeme werden solche Probleme umgangen.

Aus den gleichen Gründen nimmt die numerische Simulation eine wichtige Rolle in der Schule und im Physikunterricht ein und bietet neben dem Experiment neue Möglichkeiten und Zugänge zu im Unterricht behandelten Systemen. Dies gilt insbesondere für nichtlineare Systeme, deren Bewegungsgleichungen nicht analytisch gelöst werden können und sich eine Behandlung auf das Aufstellen der Bewegungsgleichung und eine qualitative Analyse der Bewegungsstruktur beschränken würde. Durch den Einsatz von Computersimulationen wird das selbstständige Lernen der Schüler unterstützt, und sie lernen wissenschaftliche Arbeitsmethoden kennen. Außerdem setzen sich die Schüler aktiv mit Computern auseinander, die in der heutigen Arbeitswelt und somit auch in der Schule einen immer wichtigeren Stellenwert einnehmen.

Mit dem im Rahmen einer Examensarbeit entwickelten Programm SINIS lässt sich das Verhalten der nichtlinearen Systeme Drehpendel, Überschlagspendel, Toda-Oszillator, Lorenz-System und Rössler-System untersuchen. Dabei werden die Zustandsgrößen, die die Systeme beschreiben, als Zeitreihe und im zweidimensionalen Phasenraum dargestellt. Der Phasenraum kann zusätzlich in

einer dreidimensionalen Darstellung betrachtet werden. Außerdem kann das Potential der Systeme ausgegeben und Poincaréschnitte angefertigt werden. Die Abhängigkeit der Poincaréschnitte von der Phasenlage kann mit der Poincaré-Animation demonstriert werden. Weiter können die Bifurkationsszenarien mit Feigenbaumdiagrammen untersucht werden. Beim Drehpendel und beim Überschlagspendel wird die Bewegung zusätzlich durch eine grafische Darstellung des Auslenkungswinkels visualisiert. Zur weiteren Auswertung der mit SINIS erhaltenen Ergebnisse können alle erstellten Diagramme und die ihnen zu Grunde liegenden Daten abgespeichert werden. Dabei stehen bei den Diagrammen drei unterschiedliche Formate zur Auswahl; die Tabellen werden im Textformat gespeichert. Die Systeme Pohlsches Rad, Überschlagspendel und Toda-Oszillator sind mit schulischen Mitteln relativ einfach als Experiment zu realisieren [2]. Auch das Lorenzsystem ist mit Hilfe eines Wasserrades experimentell zugänglich [3]. Die Simulation kann zur physikalischen Auswertung und theoretischen Vertiefung der Experimente im Unterricht eingesetzt werden.

In dieser Arbeit sollen einige Simulationsergebnisse am Beispiel des exzentrischen Drehpendels vorgestellt werden.

2. Bewegungsgleichung des Drehpendels

Beim exzentrischen Drehpendel handelt es sich um das aus dem Anfängerpraktikum bekannte Pohlsche Rad, an dem eine Unwucht angebracht ist. Zusätzlich zur Reibung kann das Pendel mit Hilfe einer Wirbelstrombremse gedämpft werden. Das Drehpendel ohne Unwucht zeigt das Verhalten eines

harmonischen Oszillators mit oder ohne erregender Kraft, bzw. Dämpfung. Ungedämpft schwingt es harmonisch, d.h. die Frequenz ω ist konstant und unabhängig von der Amplitude der Auslenkung x . Die Periodenlänge hängt lediglich von der Federkonstanten D ab. Wird eine Unwucht der Masse m im Abstand r von der Drehachse angebracht, so erhält die Bewegungsgleichung einen nichtlinearen Term und das Pendel zeigt ein chaotisches Schwingungsverhalten. Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet:

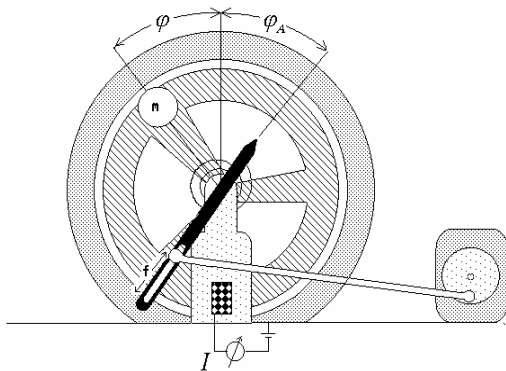


Abb. 1: Schematische Darstellung des Drehpendels (φ ist die Auslenkung, m die Zusatzmasse (Unwucht), I die Dämpfungsstromstärke; aus [1]).

$$J\ddot{x} + \beta\dot{x} = -D(x - x_a) + mgr \sin(x).$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment des gesamten Pendels, x die Auslenkung, \dot{x} die Geschwindigkeit und \ddot{x} die Beschleunigung des Pendels. β beschreibt die Dämpfung, x_a gibt den Einfluss der erregenden Kraft wieder, und es gilt:

$$x_a = \alpha_0 + f \sin(\omega t).$$

α_0 ist die Mittellage und f die Amplitude der Anregung. Die Dämpfung β setzt sich zusammen aus der Dämpfung durch Reibung und der Dämpfung durch die Wirbelstrombremse. Dabei ist der Anteil der Reibung immer entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung und wird durch den Reibungskoeffizienten a beschrieben (Stokesche Reibung). Die Dämpfung der Wirbelstrombremse besitzt den Reibungskoeffizienten b und ist abhängig vom Dämpfungsstrom I . Es gilt:

$$\beta = \frac{a}{|\dot{x}|} + bI^2.$$

Nach Umformung der Bewegungsgleichung und Auflösen nach \ddot{x} lautet die endgültige Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = \frac{1}{J} [-\beta\dot{x} - D(x - x_a) + mgr \sin(x)],$$

(vgl. [1]).

Auf Grund der durch das Drehmoment der Unwucht hervorgerufenen Nichtlinearität ist diese Gleichung analytisch nicht lösbar.

3. Bifurkationsszenario des Drehpendels

Die Schrittweite bei der Untersuchung des Drehpendels beträgt $\Delta t = 0,001s$. In Abb. 2 ist das mit SINIS aufgenommene Feigenbaumdiagramm des Drehpendels dargestellt, das einen Überblick über die gesamte Bewegungsstruktur bietet.

Bei der Erstellung des Diagramms werden zu verschiedenen Dämpfungsstromwerten Poincaré Schnitte bei der Anregungsphase $\omega = 0$ aufgezeichnet, die zu einem Feigenbaumdiagramm zusammengesetzt

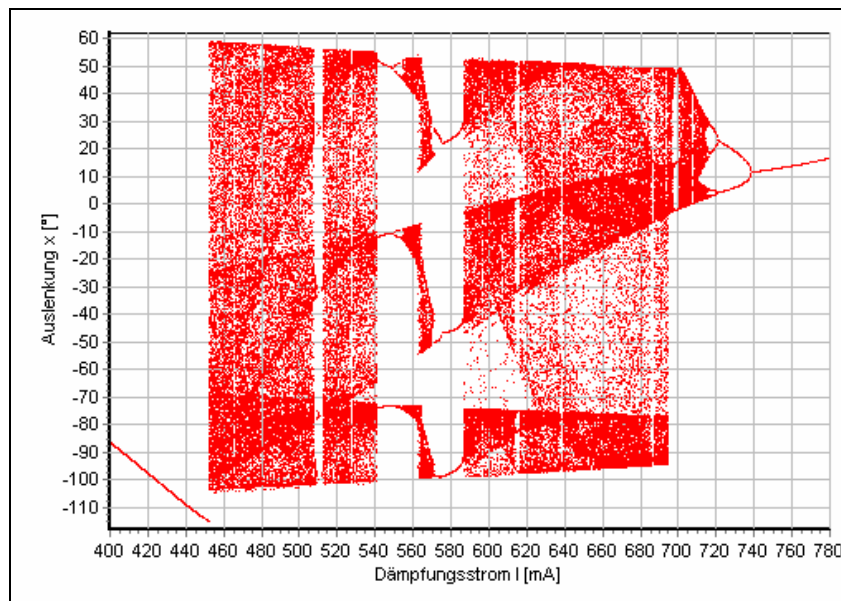


Abb. 2: Überblick über die Bewegungsstruktur des Drehpendels Rades. Nach 500 Einschwingperioden werden je 50 Punkte pro Dämpfungsstromwert eingetragen. Die Schrittweite des Dämpfungsstroms beträgt $\Delta I = 0,5mA$.

werden. Dabei startet das Drehpendels bei jedem Schnitt mit der Anfangsauslenkung $x = 0^\circ$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x} = 0^\circ/\text{s}$. Für die Systemparameter wurden typische Werte eingesetzt:

Länge des Lastarms $r = 0,085\text{m}$

Federkonstante $D = 0,01655\text{kg/s}$

Erdbeschleunigung $g = 9,81\text{m/s}^2$

Es werden 500 Einschwingperioden abgewartet, damit sich die Bewegungszustände stabilisieren können. Dann werden die Werte der Auslenkung aus dem Poincaréschnitt gegen den speziellen Dämpfungsstromwert aufgetragen. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt, sodass man ein komplettes Feigenbaumdiagramm erhält.

In Abb. 2 ist der gesamte Bereich der Bewegungsstruktur des Drehpendels vom geordneten Zustand über das Chaos bis hin zum wieder geordneten Zustand zu erkennen. Bei starkem Dämpfungsstrom I liegt ein Einerzyklus vor, der sich bei geringer werdendem Dämpfungsstrom I immer weiter aufspaltet und schließlich ins Chaos übergeht. Der chaotische Bereich wird immer wieder von Fens-

tern im Chaos unterbrochen; diese erkennt man an den senkrechten weiß erscheinenden Bereichen. Die Baumstruktur scheint sich durch das gesamte Diagramm fortzusetzen. Dieser Eindruck entsteht, da Zustände, die nahe an den stabilen Zuständen liegen, häufiger angenommen werden als weit davon entfernt liegende und somit in der Nähe der stabilen Zustände mehr Punkte eingetragen werden.

In Abb. 3 ist der Bereich von $I = 750\text{mA}$ bis $I = 695\text{mA}$ vergrößert dargestellt. Der Übergang von der Ordnung ins Chaos über ein Bifurkationsszenario ist deutlich zu erkennen. Aus einem Einerzyklus wird ein Zweierzyklus, der sich in einen Viererzyklus aufspaltet, der sich wiederum in einen Achterzyklus aufspaltet, usw.. Auch hier werden Zustände, die nahe an stabilen Zuständen liegen, häufiger eingenommen als die anderen. Ebenso sind wieder Fenster im Chaos durch die weißen Bereiche zu erkennen, z.B. im linken Teil des Diagramms. Das Rad nimmt drei verschiedene Auslenkungen an, die alle über Bifurkationen ins Chaos übergehen.

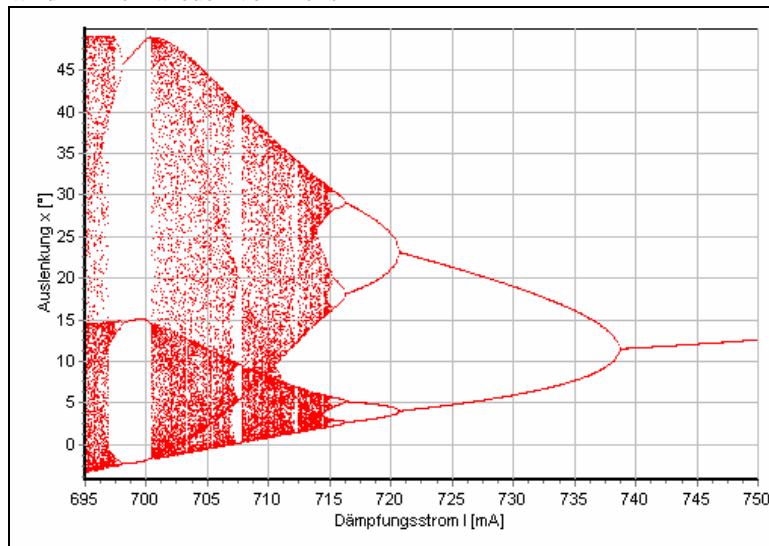


Abb. 3: Vergrößerung des Feigenbaumdiagramms mit 500 Einschwingperioden und 100 Punkten pro Dämpfungsstromwert. Die Schrittweite des Dämpfungsstroms beträgt $\Delta I = 0,1\text{mA}$.

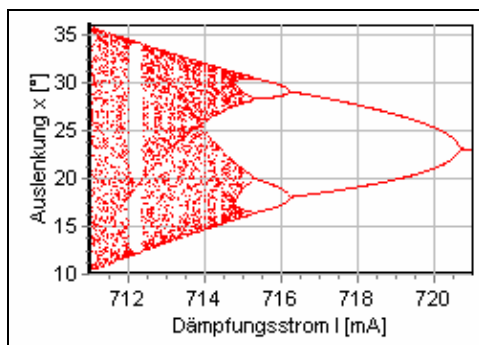


Abb.4: Vergrößerung des oberen Astes aus Abb. 3 mit 500 Einschwingperioden, 100 Punkten und $\Delta I = 0,05\text{mA}$.

Abb.4 gibt den oberen Ast aus Abb. 3 vergrößert wieder. Hier ist auch die Aufspaltung in den Sechzehnerzyklus zu erkennen.

Abb.5 gibt den oberen und den unteren Ast aus Abb.4 wieder, sodass hier auch die Aufspaltung in den Zweiunddreißigerzyklus zu erkennen ist. Die Feigenbaumdiagramme gleichen sich nicht nur untereinander, sondern auch den „übergeordneten“ Darstellungen mit kleinerem Maßstab. Diese Selbstähnlichkeit ist eine charakteristische Eigenschaft von chaotischen Systemen. Außerdem ist zu erkennen, dass das Verhältnis der Abstände zwischen den einzelnen Aufspaltungen konstant ist.

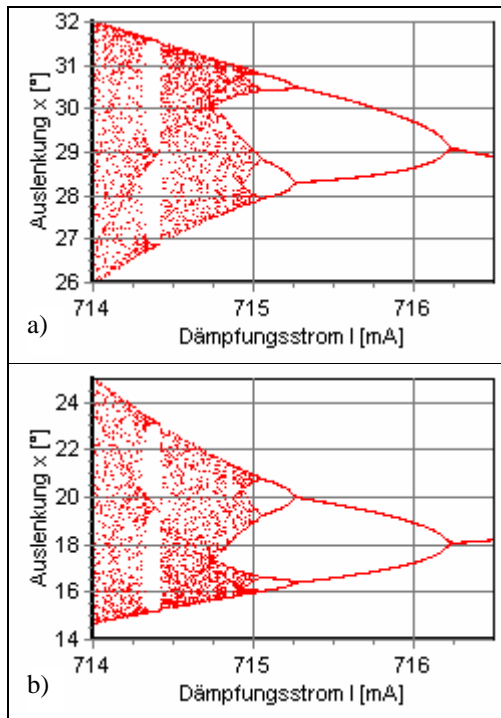


Abb.5: Vergrößerung a) des oberen und b) des unteren Astes aus Abb.4 mit 500 Einschwingperioden, 100 Punkten und $\Delta I = 0,01 \text{ mA}$.

4. Poincaré-Animation

Bei der Erstellung des Poincaréschnitts werden die das System beschreibenden Zustandsgrößen gegen eine periodische Größe des Systems aufgetragen, beim Drehpendel gegen die Phase der anregenden Kraft. Dann wird zu einem bestimmten Wert dieser

Größe eine Ebene durch den Phasenraum gelegt, die von der Trajektorie geschnitten wird und die den Poincaréschnitt ergibt. Die Abhängigkeit des Poincaréschnitts von dem Wert der periodischen Größe kann mit der Option Poincaré-Animation von SINIS demonstriert werden, indem eine Abfolge von Poincaréschnitten zu verschiedenen Phasenlagen aufgenommen wird und hintereinander als GIF-File abgespielt wird (s. Onlinehilfe zu SINIS). Zwei Beispiele für eine Poincaré-Animation sind dem Text beigelegt. Dabei wurden beim Drehpendel bei jedem Schnitt bei einem Dämpfungsstrom von $I = 460 \text{ mA}$ nach 500 Einschwingperioden 1500 Punkte aufgenommen. Beim Überschlagspendel wurden je zwei Poincaréschnitte nebeneinander dargestellt. Wieder wurden nach 500 Einschwingperioden 1500 Punkte aufgenommen. Die Anregungsamplitude betrug $f = 110^\circ$ (Parameter des Pendels s. Onlinehilfe zu SINIS). Beide Filme laufen mit halber Originalgeschwindigkeit.

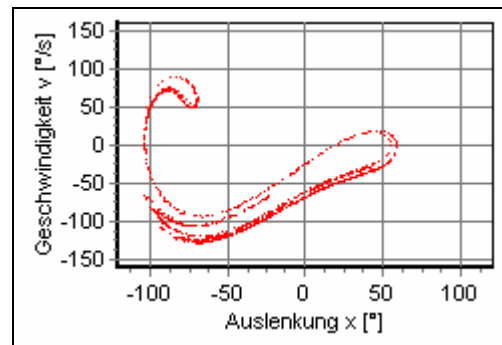


Abb.6: Poincaréschnitt mit 500 Einschwingperioden und 1500 Punkten.

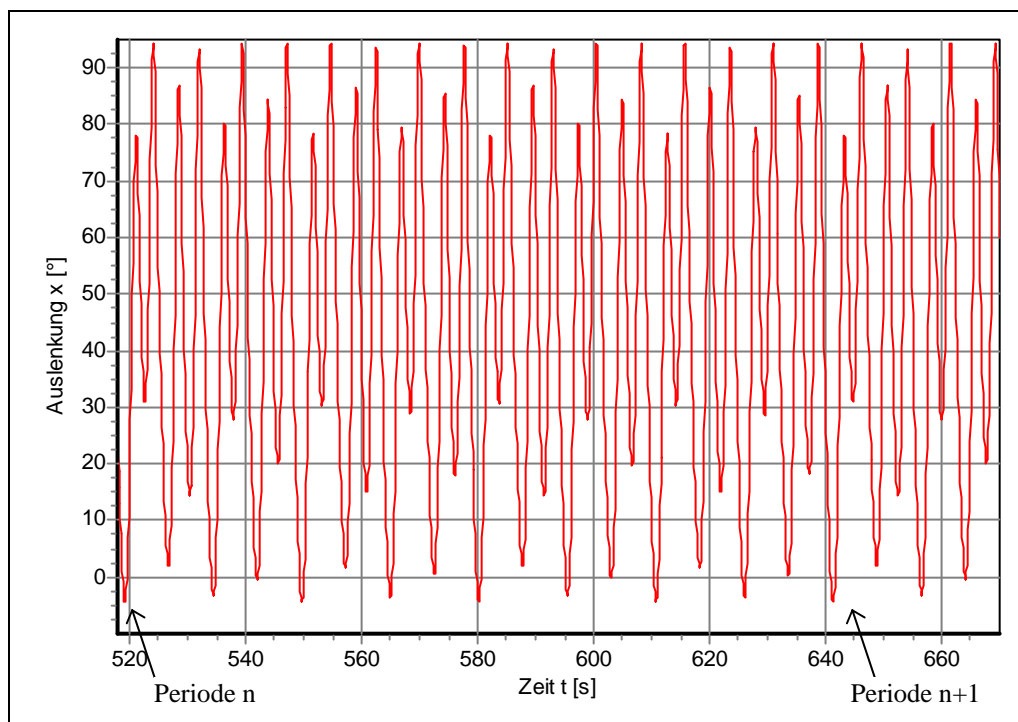


Abb.7: Zeitdiagramm des stabilen 32er-Zyklus des Drehpendels.

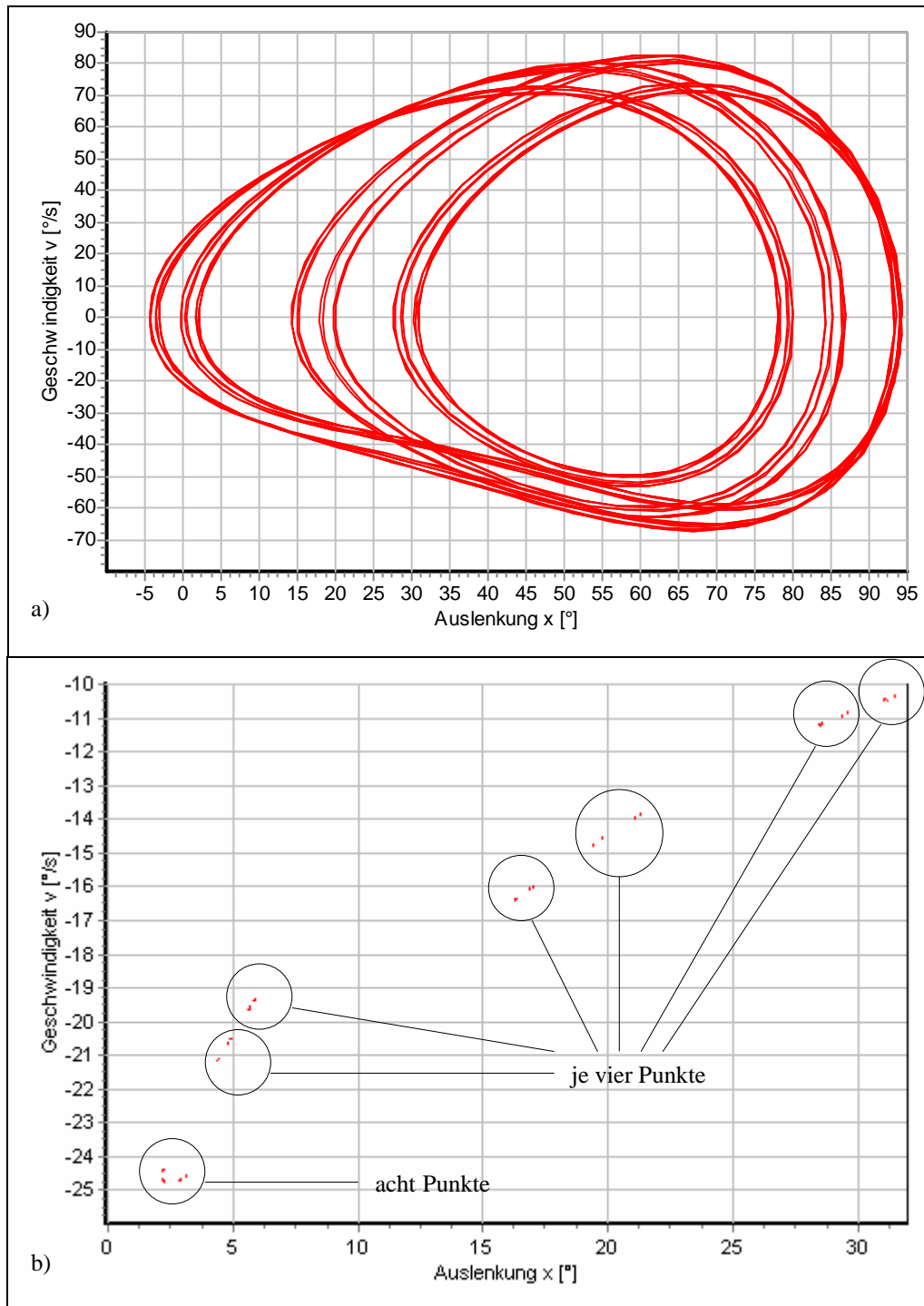


Abb.8: a) Phasendiagramm und b) Poincaréschnitt des stabilen 32er-Zyklus.

5. Zweiunddreißigerzyklus

Zum Schluss soll noch der stabile Zweiunddreißigerzyklus betrachtet werden. Dieser wird beim Drehpendel mit Standardparametern bei einem Dämpfungsstrom von $I = 713,95\text{mA}$ erreicht und liegt nur $0,05\text{mA}$ neben dem Sechzehnerzyklus (z.B. liegen Zweier- und Viererzyklus 19mA auseinander). Der stabile 64er-Zyklus bei einem Dämpfungsstrom von $I = 713,92\text{mA}$ soll hier nicht dargestellt werden, da die einzelnen Bahnen der Trajektorie kaum zu trennen sind. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass sich die

Bahnen im Phasendiagramm schneiden, was ein Widerspruch zur schwachen Kausalität wäre. Dies liegt an der zweidimensionalen Projektion des Phasenraums. Mit der Option „3D-Darstellung“ von SINIS ist eine dreidimensionale Anzeige möglich, die den gesamten Phasenraum darstellt, sodass die Trajektorien ohne vorherige Schnittpunkte in sich zurücklaufen.

Beim Zweiunddreißigerzyklus nimmt das Pendel 32 verschiedene Maxima und Minima ein. Da die einzelnen Minima und Maxima nicht genau zu trennen sind, wird das Phasenraumdiagramm

zweimal vergrößert. Abb.9a) zeigt die linke Spitze der Trajektorie in Abb.8a) stark vergrößert. Auch hier sind keine 32 diskreten Linien zu erkennen, sodass in Abb.9b) der rechte Teil von Abb.9a) noch einmal vergrößert dargestellt ist. Hier sind nun acht Doppellinien zu erkennen.

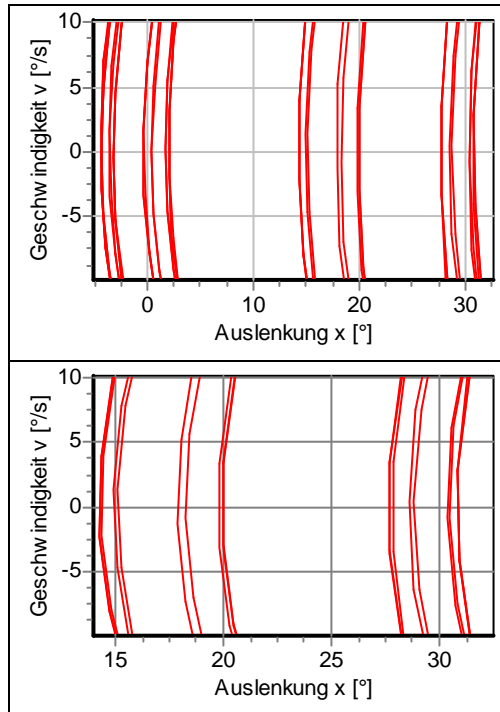


Abb.9: Vergrößerungen des Phasenraumdiagramms des Zweiunddreißigerzyklus.

6. Schluss

Mit SINIS können Eigenschaften nichtlinearer Systeme untersucht werden, die in Realexperimenten nur schwer oder gar nicht zu beobachten sind. Dies liegt vor allem an den störenden Einflüssen, die das Finden dieser Phänomene und besonders die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse erschweren. Dennoch treten diese Phänomene im Prinzip auch in den Realexperimenten auf und sind ein wichtiger Bestandteil dieser Systeme. SINIS bietet also eine Möglichkeit, diese nichtlinearen Systeme zu untersuchen und stellt damit eine Erweiterung und Bereicherung der bisherigen Behandlungsmethoden nichtlinearer Systeme dar.

7. SINIS auf der Tagungs-CD

Auf der Tagungs-CD befinden sich neben diesem Text zwei Beispiele zur Poincaré-Animation des [Pohlschen Rades](#) und des [Überschlagpendels](#), sowie eine Version von SINIS zur [Installation](#) und eine Version zum direkten [Starten von der CD](#).

8. Literatur

- [1] Backhaus, U., Schlichting, H. J.: *Auf der Suche nach Ordnung im Chaos*. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht Nr. 43/8 (1990). S. 456 – 466.

- [2] Boysen et al.: *Oberstufe Physik* (Sachsen Anhalt 11). Berlin: Cornelsen Verlag 2000.
- [3] Schlichting, H. Joachim, Bachhaus, Udo, Küpker, H.G. Chaos beim Wasserrad - ein einfaches mechanisches Modell für das Lorenzsystem. *Physik und Didaktik* 19/3, 196- 219 (1991)