

Das „Schwert der Sonne“ -

Alltägliche Reflexionen im Lichte eines einfachen optischen Phänomens.

Teil 2: Mathematische Modellierung und Simulation

H. Joachim Schlichting Essen

1. Einleitung

In einem früheren Beitrag [1] wurde das u.a. als *Schwert der Sonne* bezeichnete Lichtphänomen in einigen seiner zahlreichen Varianten dargestellt und qualitativ physikalisch beschrieben. Im folgenden soll diese Beschreibung durch quantitative Zugänge ergänzt werden. Die Darstellung wird nicht so sehr dadurch motiviert, physikalische Beschreibungen würden erst in der quantitativen Modellierung zum Ziel kommen. Für viele Belange des Physikunterrichts erweist sich eine qualitative Darstellung als völlig ausreichend. Vielmehr soll eine Alternative zur weit verbreiteten Praxis des Physikunterrichts skizziert werden, Unterrichtsgegenstände stets auf jene Idealgestalten zu reduzieren, die dadurch zwar zugänglich gemacht, gleichzeitig aber so weit vom ursprünglichen Alltags- und Naturphänomen entfernt werden, daß die von ihnen ausgehende (meist nicht physikalisch begründete) Motivation zum Erliegen kommt.

Beschreibt man demgegenüber die komplexen Phänomene mit Hilfe eines einfachen Algorithmus, dessen Ausführung mit ähnlicher Selbstverständlichkeit dem Computer überlassen werden kann, wie beispielsweise die Ausführung der Reihenentwicklung von $\sin(50^\circ)$ dem Taschenrechner, so läßt sich das *Schwert der Sonne* mit vergleichbarem Aufwand "berechnen" wie das Spiegelbild eines selbstleuchtenden Punktes. Denn in beiden Fällen wird nur das Reflexionsgesetz benötigt.

Damit ist bereits gesagt, daß wir uns auf die geometrisch optischen Aspekte des Phänomens beschränken. Die mit dem Einfallswinkel variierende Intensität des Lichtes (Fresnelsche Gleichungen) wird ebenso vernachlässigt, wie die Farbeffekte die zumindest bei den Lichtbahneffekten einer CD nicht zu übersehen sind. Auch jene Effekte, die aufgrund der zeitlichen Veränderung des Neigungswinkels zustandekommen, werden hier nicht betrachtet.

2. Vom Phänomen zum Polynom

Rein qualitativ gesehen kommt das Phänomen des *Schwertes der Sonne* dadurch zustande, daß das von einem leuchtenden Gegenstand ausgehende Licht auf zahlreichen Wegen das Auge erreicht. Das setzt voraus, daß die das Licht reflektierende Oberfläche Flächenelemente unterschiedlicher Neigungen aufweist, also uneben (gewellt, zerkratzt u.ä.) strukturiert ist. Je größer die "Winkelvielfalt", die das auftreffende Licht vorfindet, desto weiter entfernt vom "Spiegelpunkt" (dem einzigen Punkt, an dem das Licht bei einer ebenen Fläche reflektiert würde) treten Reflexe auf.

Wir gehen im folgenden zunächst von einem völlig ungeordneten Wellenmuster aus. Jedem Flächenelement $P(x,y)$ der Oberfläche läßt sich ein senkrecht darauf stehender Normalenvektor \vec{n} zuordnen. Das von der Lichtquelle L ausgehende Licht trifft $P(x,y)$ unter einem Einfallswinkel γ bezüglich \vec{n} und wird von hier unter einem gleich großen Ausfallswinkel ins Auge des Beobachters B reflektiert (Abb. 1). Unterstellt man, daß die Neigungen der Wellen einen bestimmten Maximalwinkel α_m nicht überschreiten, so läßt sich die Lichtbahn als Gesamtheit aller Flächenelemente $P(x,y)$ auffassen, deren Normale \vec{n} einen Winkel $\alpha < \alpha_m$ gegen

die Vertikale \vec{v} besitzen. Die Randkurve der Lichtbahn (gestrichelt gezeichnet) ist der geometrische Ort all jener Flächenelemente $P(x,y)$, deren Normale mit der Vertikalen gerade den Winkel α_m bilden: $\alpha = \alpha_m$.

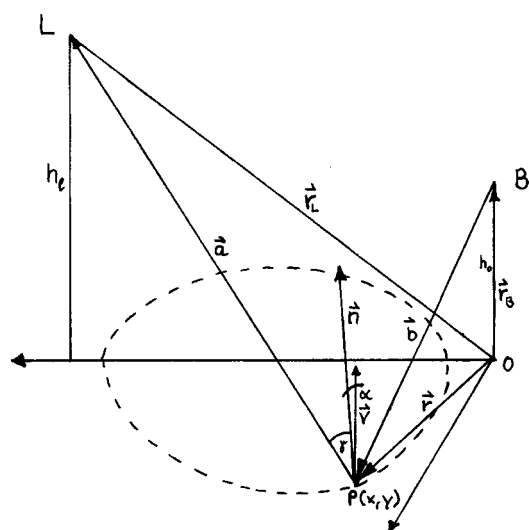


Abb. 1: Das Licht der Quelle L erreicht über verschiedene Wege das Auge des Beobachters B.

Um die Lichtbahn zu ermitteln muß demnach für alle $P(x,y)$ festgestellt werden, unter welchem Winkel α das Licht ins Auge reflektiert wird und ob $\alpha < \alpha_m$. Wie läßt sich α mit Hilfe der bekannten Größen als Funktion von x und y darstellen? Dazu muß man zunächst die Flächennormale \vec{n} finden. Da nach dem Reflexionsgesetz der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel bezüglich \vec{n} ist, halbiert \vec{n} gerade den Winkel 2γ zwischen dem von L kommenden (durch den Vektor \vec{a} beschriebenen) und dem ins Auge des Beobachters reflektierten (durch den Vektor \vec{b} beschriebenen) Lichtstrahl. \vec{n} läßt sich aus der Differenz der Einheitsvektoren \hat{b} und \hat{a} von \vec{b} und \vec{a} bestimmt werden, weil – anschaulich gesprochen – \vec{n} als Diagonale und damit als Winkelhalbierende der durch \hat{b} und \hat{a} aufgespannten Raute aufgefaßt werden kann. Da die Normale \vec{n} die Vertikale \vec{v} unter dem Neigungswinkel α schneidet, ist das Verhältnis der Längenabschnitte von \vec{n} und \vec{v} gleich dem Kosinus von α . Da dieses Verhältnis gerade der z-Komponente \hat{n}_z des Einheitsvektors von \vec{n} ist, gilt:

$$\cos \alpha = \hat{n}_z. \quad (1)$$

Wie im Anhang ausgeführt wird, läßt sich \hat{n}_z mit Hilfe der Parameter h_o , h_l , l (h_o = Höhe des Beobachters, h_l = Höhe der Lichtquelle, l = Abstand von Beobachter und Lichtquelle) als Funktion von x und y schreiben. Für $\alpha = \alpha_m$ erhält man auf diese Weise einen analytischen Ausdruck für die Randkurve der Lichtbahn, ein Polynom 6. Ordnung, das sich nur numerisch auswerten ließe.

3. Didaktische Probleme

Um jedoch keinen falschen Eindruck zu erwecken: Die numerische Auswertung dürfte im Zeitalter des Computers kaum das Problem sein. Problematisch ist vielmehr die Herleitung eines expliziten Ausdrucks von Gl. (1). Wie man sich durch den bloßen Nachvollzug des im Anhang skizzierten Lösungsweges vor Augen führt, kann man zumindest in der Sekundarstufe I nicht auf mathematische Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler zurückgreifen, die eine solche Herleitung in einem vertretbaren Zeitrahmen erlauben würden. Aber auch für den Physikunterricht der Sekundarstufe II sind Zweifel angebracht. Selbst wenn dort die Herleitung gelänge, bliebe zu fragen, was damit gewonnen wäre. Liefere man nicht Gefahr, das ursprüngliche Phänomen zu "zerrechnen" 51/7 (1998), S. xxx

[2], indem das auf ganz anderen Motiven, (als umfangreiche Rechnungen durchzuführen), beruhende Interesse der Schülerinnen und Schüler verschüttet wird? Der Anspruch und zeitliche Aufwand, den die mathematische Modellierung von Natur- und Alltagsphänomenen unter dieser Perspektive erfordern, sind vermutlich ein wesentlicher Grund dafür, daß ihre Behandlung trotz der hohen Anfangsmotivation und des direkten Bezuges zur Umwelt bislang so gut wie keinen Eingang in den Physikunterricht gefunden hat.

Aus diesem Grund hat man sich immer wieder bemüht, Alternativen in Form von Näherungslösungen bzw. Beschränkungen auf Spezialfälle zu entwickeln. Es zeigt sich jedoch, daß derartige Bemühungen (vgl. z.B. die Ausführungen von MARCEL MINNAERT in dem ansonsten exellerten Werk, das zu einer Zeit geschrieben wurde, als Computersimulationen noch nicht allgemein zugänglich waren [3]), oft ebenfalls aufwendig, anspruchsvoll und wenig motiviert erscheinen. Wenn zudem als Ergebnis nicht viel mehr herauskommt, als daß das

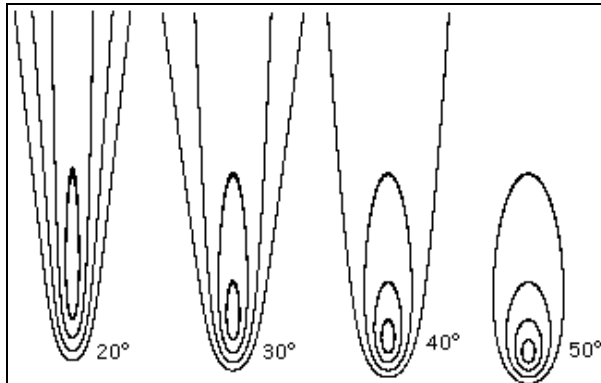


Abb. 2: Randkurve der Lichtsäule für Wellenneigungen $\gamma = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ und 20° bei verschiedenen Sonnenständen.

Schwert der Sonne in der Regel länger als breiter ist (wie ja bereits der Name anschaulich zum Ausdruck bringt), so werden die Schülerinnen und Schüler dadurch nicht gerade von der Sinnhaftigkeit von Berechnungen überzeugt.

Im übrigen machten diese Bemühungen ohnehin nur einen Sinn für den Unterricht der Sekundarstufe II. Es fragt sich aber, ob das *Schwert der Sonne* sowohl vom physikalischen Gehalt (geometrische Optik) als auch von den Interessen der Schülerinnen und Schüler her nicht eher zum Stoffplan der Sekundarstufe I gehören sollte.

Für die Sekundarstufe II gäbe es genügend Natur- und Alltagsphänomene, die mit anspruchsvolleren physikalischen Inhalten (z.B. Wellenoptik) verknüpft sind.

4. Einfache Algorithmen

Vor diesem Hintergrund soll demonstriert werden, wie mit einfach nachzuvollziehenden Algorithmen, deren Auswertung man ohne Einbußen für das eigentliche (physikalische) Verständnis getrost dem Computer überlassen kann, die wesentlichen quantitativen Aspekte der verschiedensten Lichtbahnphänomene erschlossen werden können.

4.1 Die Form der Lichtbahn

In einem in [1] beschriebenen Experiment wird mit einem geneigten Miniaturspiegel (Die Neigung α_m sollte frei wählbar aber jeweils fest eingestellt sein.) die Randkurve des Sonnenschwertes abgescannt. Dabei muß der Spiegel für jeden Punkt $P(x,y)$ dieser Kurve so orientiert (verschoben und gedreht) werden, daß man die Lichtquelle L von Punkt B aus sieht, bzw. die von L ausgehenden Lichtstrahlen das Auge treffen. Hat man diese Randkurve, so weiß man, daß für jeden Punkt innerhalb des von der Kurve berandeten Bereiches kleinere Winkel $\alpha < \alpha_m$ ausreichen, die Reflexionsbedingung zu erfüllen, und die Punkte daher zur Lichtbahn gehören.

Dieses Experiment läßt sich direkt in einen Algorithmus übersetzen, indem man statt den Spiegel zu orientieren, den Computer nach der eingangs skizzierten Methode berechnen läßt, wie groß der Winkel der Flächennormalen an dieser Stelle sein müßte, damit der Beobachter bei $P(x,y)$ die Lichtquelle sehen kann. Nur wenn sich ein kleinerer als der vorgegebene maximale Winkel, $\alpha < \alpha_m$, ergibt, gehört der Punkt zum Bereich der Lichtbahn und kann entsprechend eingefärbt werden. Die Punkte $P(x,y)$, für die $\alpha = \alpha_m$ ist, entsprechen der Randkurve des Lichtbahnbereichs.

Für die Fälle, in denen die Ausdehnung der Lichtquelle von erkennbarem Einfluß auf die Form der Lichtbahn ist, ist es außerdem keine Schwierigkeit, dieser Ausdehnung Rechnung zu

tragen, indem die obige Prozedur für jeden Punkt der (hier stets als kreisrund vorausgesetzten) Lichtquelle ausgeführt wird [4].

Für die Schülerinnen und Schüler reicht es m.E. völlig aus, wenn sie verstehen, daß aufgrund des Reflexionsgesetzes die Normale gerade den Winkel zwischen dem einfallenden und reflektierten Lichtstrahl halbiert, und wenn sie für einen ausgewählten Punkt die Prozedur nachvollziehen, die zur Auffindung der Normalen und des Neigungswinkels α führt. Auf eine konkrete Ableitung und Berechnung kann ohne Einbuße für das physikalische Verständnis verzichtet werden. Dies und vor allem die zahllosen Wiederholungen der Rechnung für alle Punkte der betrachteten Fläche sind typische Routineaufgaben für einen Computer. Auf diese Weise ist die ursprüngliche Komplexität des Problems weitgehend auf die Wiederholung einer einfach zu beschreibenden Prozedur zurückgeführt worden: Die Komplexität ist demnach einfach, einfach, einfach...

4.2 Die Struktur der Lichtbahn

Bisher haben wir uns auf eine Fläche beschränkt, die insofern strukturlos ist, als die Flächenelemente in jedem Punkt alle Winkel $\alpha < \alpha_m$ annehmen können. In vielen Fällen führt aber gerade die besondere Beschaffenheit der Oberfläche zu auffälligen Strukturierungen des Lichtbahn, die teilweise so stark von der statistischen Verteilung der Lichtpunkte im ursprünglichen Phänomen des *Schwertes der Sonne* abweichen, daß man den physikalischen Zusammenhang zunächst gar nicht erkennt (vergleiche die zahlreichen Beispiele in [1]).

Zerkratzte Oberflächen

Nehmen wir etwa jene auf den ersten Blick merkwürdigen Ringstrukturen, die man beispielsweise auf einem ge-

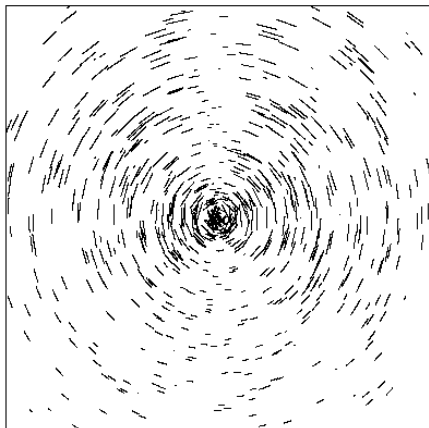


Abb. 4: Reflexionsmuster einer durch Gebrauchsspuren zerkratzten glänzenden Platte.

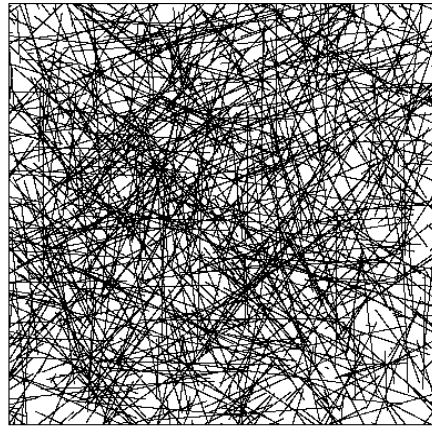


Abb. 3: Im Vergleich zu den sichtbaren Abschnitten der Kratzer (Abb. 4) die tatsächlich vorhandenen Kratzer.

brauchten Löffel oder einer polierten Messingtafel sieht, wenn sie von einer (möglichst punktförmigen) Lichtquelle beleuchtet wird. Die Gesamtheit der Kratzerabschnitte, die Flanken passenden Neigung besitzen, um das Licht ins Auge zu reflektieren, erscheint auf konzentrischen Ringen um das Spiegel-

bild der Lichtquelle orientiert. Diese Ringe nähern sich um so stärker der Kreisform an, je senkrechter man auf die reflektierende Fläche blickt. (Ganz ist das natürlich nicht möglich, weil der Kopf die Lichtquelle verdecken würde).

Auch dieses Phänomen kann im Rahmen des obigen Algorithmus simuliert werden, wenn man nur noch den auf bestimmten Geraden (d.h. den Kratzern bzw. Riefen) liegenden Flächenelementen – und nicht mehr jedem - erlaubt, Orientierungen $\alpha < \alpha_m$ anzunehmen. Dazu wird die Fläche vorher „zerkratzt“, d.h. mit zufällig orientierten Geraden zufallsverteilter Länge versehen. Dabei stellt der wieder frei wählbare Maximalwinkel α_m gewissermaßen die

Stärke oder Tiefe der Kratzer bzw. Riefen dar. In der Simulation werden nunmehr nur genau diejenigen Abschnitte der Kratzer eingefärbt, bei denen unter den gegebenen Bedingungen Licht von L nach B reflektiert werden kann (siehe Abb. 4).

Anders als in der Wirklichkeit, die uns normalerweise nur jene Riefenabschnitte vor Augen führt, die Licht zum Beobachter zu reflektieren vermögen, und damit das Lichtbahnphänomen ausmachen, hat man in der Computersimulation [5] darüber hinaus die Möglichkeit, im Vergleich dazu alle vorhandenen Riefen in voller Länge sichtbar zu machen (Abb. 3). Durch diesen Vergleich läßt sich die Täuschung, bei der die sichtbare Kratzerstruktur für die gesamte gehalten wird, eindrucksvoll entlarven. Eindrucksvoll vor allem deshalb, weil man auf einen Blick erkennt, daß normalerweise nur sehr kurze Abschnitte von den passend orientierten tatsächlichen Kratzern zu erkennen sind.

Edelstahlplatten

Eine weitere Klasse von Lichtbahnphänomen besteht aus Lichtschweifern, die vornehmlich auf

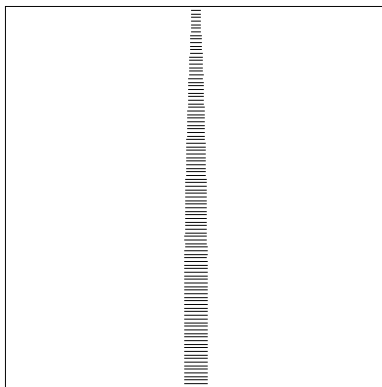


Abb. 5: Lichtschweifung, wie sie typischerweise bei einer durch Kratzer unversehrten, aber Spuren des Herstellungsprozesses aufweisenden Edelstahlplatte zu sehen sind.

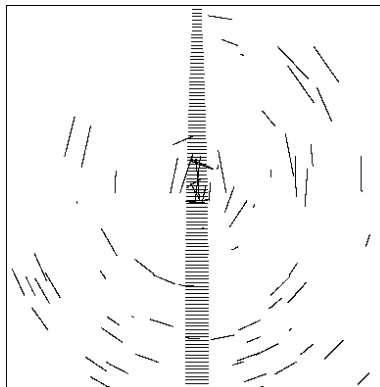


Abb. 6: Wie Abb. 5 mit einem Gebrauchsspuren auf der Platte, die andeutungsweise die Ringstruktur (Abb. 4) erkennen lassen.

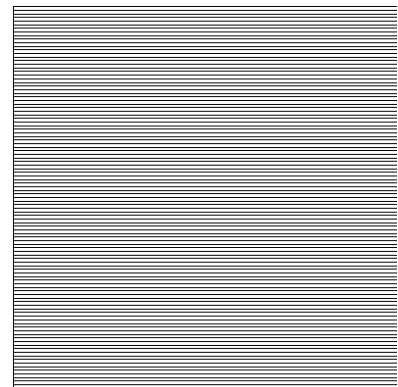


Abb. 7: Das normalerweise unsichtbare Muster des Herstellungsverfahrens der Edelstahlplatte.

Edelstahlplatten vom reflektierten Bild der Lichtquelle ausgehen. Sie kommen dadurch zustande, daß die Oberfläche nicht mit statistisch verteilten Gebrauchsspuren versehen ist, sondern mit feinsten, weitgehend parallel verlaufenden Riefen, die vom Herstellungsvorgang herrühren. Manchmal sind sie auch noch von senkrecht dazu verlaufenden Riefen überlagert, was sich durch ein kreuzförmiges Schweifmuster verrät. Auch diese Schweifung lassen sich mit unserem Algorithmus simulieren, wenn man die Fläche statt mit statistisch verteilten mit parallelen Geraden versieht (vgl. Abb. 5). Auch die Überlagerung der regelmäßigen parallelen Riefen und der Gebrauchsspuren, in Form eines von Ringen überlagerten Schweifmusters läßt sich auf diese Weise simulieren (Abb. 6).

Schallplatten und CDs

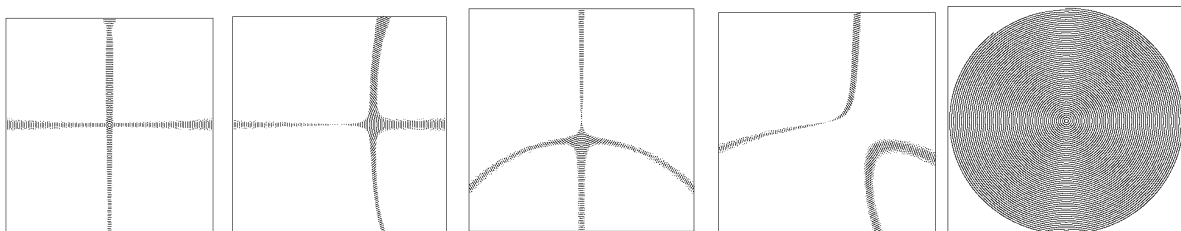


Abb. 8: Simulationen der Reflexe einer Schallplatte bei verschiedenen Stellungen von Lichtquelle und Beobachter (von links nach rechts: symmetrische Lage, Verschiebung nach rechts, Verschiebung nach unten, Verschiebung nach unten und rechts). Ganz rechts: Modellschallplatte mit 60 Rillen, die den Simulationen zugrunde gelegt wurde.

Versieht man die betrachtete Fläche mit einem konzentrischen Ringmuster, so lassen sich jene Lichtschweifphänomene simulieren, die Schallplatten und CDs im (monochromatischen) Licht aufweisen (Abb. 8.).

Da neben α_m auch die übrigen Parameter h_0 , h_b , l bei allen Simulationen variiert werden können, lassen sich auch Phänomene aufspüren, die man aufgrund einer ungewöhnlichen Perspektive zunächst nicht als spezielle Lichtbahn erkennt.

Durchsichtsphänomene

Bei durchsichtigen Flächen kann man ebenfalls Schwert-, Schweif- und Ringmuster beobachten, wenn man durch die transparenten Materialien hindurch auf eine Lichtquelle blickt. Solche Flächen findet man im Alltag häufig vor, wenn man sie zu sehen gelernt hat. Typisch sind fein zerkratzte Scheiben (Fensterscheiben in Bussen und Bahnen, die Windschutzscheibe eines PKW), und durchsichtige Folien der unterschiedlichsten Art. Aber auch innerlich gesprungener Plexiglasscheiben (u.ä.), wie man sie beispielsweise als innere Abdeckung der Flugzeugfenster antrifft, gehören dazu. In diesem Fall muß der Algorithmus etwas modifiziert werden. Es muß im Programm berücksichtigt werden, daß nicht mehr die Reflexion, sondern die Lichtbrechung an den unterschiedlich orientierten Flanken der Riefen und Kratzer für die Ablenkung der Lichtstrahlen verantwortlich ist. Interessanterweise erhält man aber ganz ähnliche Muster wie bei der Reflexion (siehe Abb. 9). Einige Beispiele aus der Vielzahl derartiger Phänomene ist in [1] beschrieben.

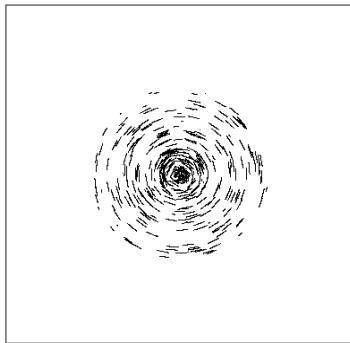


Abb. 9: Ringstruktur, wie sie zuweilen beim Blick durch Scheiben zu beobachten ist.

Abb. 9: Ringstruktur, wie sie zuweilen beim Blick durch Scheiben zu beobachten ist.

4.3 Das *Schwert der Sonne* auf einer mit Riefen versehenen Wasseroberfläche

Die zahlreichen Reflexmuster, die wir im Alltag in den verschiedensten Variationen beobachten, sind physikalisch gesehen nur eine Variante des ursprünglichen Naturphänomens des *Schwertes der Sonne*. Dieser Gedanke liegt allerdings zunächst nicht auf der Hand. Denn zum

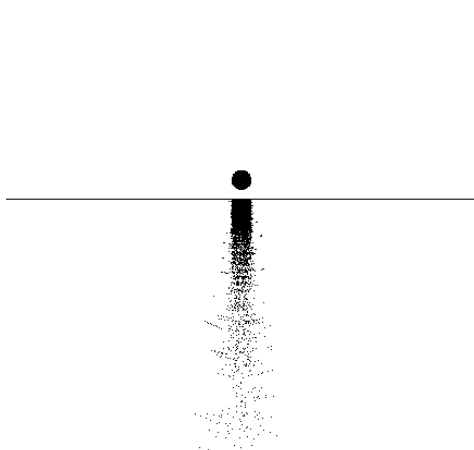


Abb. 10: Die größere Lichtintensität des Schwertes der Sonne im Hintergrund und die Zerklüftung im Vordergrund werden durch die Simulation gut wiedergegeben. Im vorliegenden Fall wird die Sonne durch ein 500mm- Teleobjektiv gesehen.

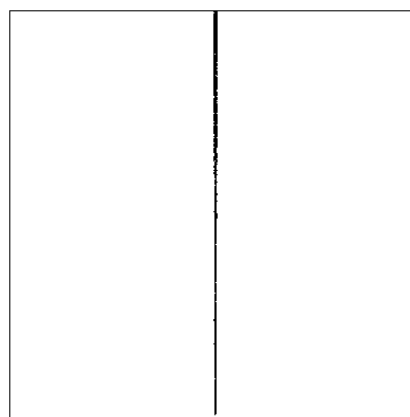


Abb. 11: Das Schwert der Sonne, wie es sich im perspektivenfreien (d.h. von einem Menschen nicht einnehmbaren)Blick ergeben würde. Die Lösung der exakten Rechnung ergibt ebenfalls dieses Dreieck.

einen sind bei den meisten Alltagsphänomenen Beobachter und Lichtquelle relativ zur reflektierenden Fläche ganz anders positioniert als etwa beim Sonnenuntergang relativ zur Oberfläche des Gewässers. Zum anderen erfährt das über vergleichsweise riesige Flächen

sich erstreckende *Schwert der Sonne* durch die perspektivische Verkürzung eine mehr oder weniger große Deformation, die bei den meist aus der Nähe und im Aufblick gesehenen verhältnismäßig kleinen Flächen (wie blanke Löffel, Edelstahlplatten und zerkratzte Scheiben) nicht ins Gewicht fallen und vernachlässigt werden können. Mit anderen Worten: Das *Schwert der Sonne* auf dem Wasser wird kaum so gesehen, wie es "an und für sich" ist. Mit "an und für sich" soll auf die Form verwiesen werden, die sich aufgrund der Berechnung bzw. Computersimulation ergibt, wenn man die Perspektive unberücksichtigt läßt. Diese Form kann so niemals wahrgenommen werden und ist daher nur von theoretischem Interesse. Die in Abb. 2 dargestellten Kurven sind von dieser Art. Um die „exakte“ Rechnung auch noch realistisch zu machen, hätte auch hier die Perspektive mit einbezogen werden müssen, was zu einer weiteren Verkomplizierung der Ausdrücke geführt hätte. Deshalb wurde in den hier beschriebenen Algorithmen stets die Perspektive mit berücksichtigt. (siehe Abb. 10 und Abb. 11).

Indem wir das Meer wie eine zerkratzte Edelstahlplatte behandeln, kommen wir dem tatsächlich beobachteten *Schwert der Sonne* näher als im Rahmen des ersten Modells, bei dem das durch die Randkurve eingeschlossene Gebiet einheitlich eingefärbt wurde. Jedenfalls gibt das so gewonnene Bild (Abb. 10) die auch in Wirklichkeit zu beobachtenden Zerklüftungen und die statistische Verteilung der Helligkeit des *Schwertes* wieder. Die durch die Wellenbewegung des Wassers hervorgerufene Dynamik der Lichtbahn wird natürlich auch in diesem Modell nicht erfaßt.

5. Plädoyer für den Einsatz des Computers

Naturphänomene und Computersimulationen werden nur zaghaft miteinander in Verbindung gebracht. Die Ursache dafür ist einerseits in der nicht immer unberechtigten Befürchtung zu sehen, daß Reales durch Virtuelles, Sein durch Schein ersetzt wird mit allen negativen Folgen für eine adäquate Wahrnehmung der natürlichen und wissenschaftlich technischen Welt. Andererseits dürften auch rein affektiv begründete Vorbehalte eine Rolle spielen, derart daß der Natur und Naturerlebnissen zugewandte Menschen oft Akzeptanzprobleme mit simulierten Phänomenen äußern.

Die obige Skizze des Computereinsatzes zur Erschließung von Natur- und Alltagsphänomenen soll auch als Beleg dafür gesehen werden, daß Simulationen nicht notwendig mit einer Entfernung und Entfremdung von der Natur und der Realität verbunden sind, sondern in zahlreichen Fällen überhaupt erst einen über das reine gefühlsmäßige Erleben hinausgehenden Zugang zu den Phänomenen erlauben und über diesen Umweg eine Vertiefung und Bereicherung des physikalisch "gestärkten" Blicks ermöglichen.

Darüberhinaus sollte man folgende Argumente nicht unterschätzen:

- Die experimentell erhobenen Daten (abscannen der Schwertform) [1] lassen sich mit der simulierten Form vergleichen. Damit kann u.a. Vertrauen dafür erworben werden, daß das der Simulation zugrunde gelegte Modell leistet, was man von ihm erwartet.
- Darauf aufbauend kann die Simulation helfen, über den empirisch zugänglichen Bereich hinauszugehen (ähnlich wie es das Fernrohr erlaubt, über den mit unbewaffneten Auge wahrgenommenen Phänomenbereich hinauszugehen). Man wird auf diese Weise in die Lage versetzt, sich über jene Situationen ein „anschauliches“ Bild zu verschaffen, die uns die Natur nur zu ungünstigen Zeiten, an ungünstigen Orten oder überhaupt nicht zugänglich macht. Insbesondere ermöglicht uns die Simulation im vorliegenden Beispiel, den Unterschied zwischen der theoretischen, perspektivenlosen „Ansicht“ der Schwertform, (wie sie allenfalls von Gott gesehen werden kann) und der aus den unterschiedlichsten Perspektiven

tatsächlich wahrgenommenen Formen zu verdeutlichen. Auf diese Weise kann man beispielsweise zeigen, wie das Schwert der Sonne unter den gegebenen Bedingungen aus einem Flugzeug aussehen würde oder erklären wieso bei Sonnenuntergang keine sich zum Horizont hin verjüngende Bahn zu sehen ist.

- Mit Hilfe einer Computersimulation kann man sich auch eine Anschauung über irrealer Extrapolationen eines Phänomens verschaffen. Parameter sind in der Simulation unabhängig davon, was in der Realität möglich ist, nahezu beliebig variierbar.
- Denkbar ist sogar, im Rahmen physikalischer Gesetze Phänomene "sichtbar" zu machen, die es in Wirklichkeit überhaupt nicht gibt. (Man denke etwa an die Luftspiegelungen, die sich ergeben würden, wenn der Brechungsindex der Luft sehr viel stärker mit der Temperatur variierte, als er es tatsächlich tut).
- Die analytisch-geometrische Behandlung des Phänomens ist äußerst kompliziert (siehe oben). Selbst wenn man die Randkurve abzuleiten und das entsprechende Polynom hinschreiben vermag, hat man damit insofern nichts gewonnen, als die Auswertung auch wieder nur numerisch möglich ist und auch in diesem Fall auf den Computer zurückgegriffen werden muß.

6. Anhang

Die Randkurve der Lichtbahn ist der geometrische Ort aller Punkte $P(x,y)$, für die gilt:

$$\cos \alpha_m = \hat{n}_z \quad (1)$$

\hat{n}_z ist die z-Komponente des Einheitsvektors der Wellennormalen. Er läßt sich folgendermaßen durch die gegebenen Größen h_o, h_l, l als Funktion von x und y ausdrücken:

Seien $\vec{r}_B = (0,0,h_o)$, $\vec{r}_L = (l,0,h_l)$ und $\vec{r} = (x,y,0)$ die Ortsvektoren des Beobachters B und der Lichtquelle L, dann gilt für die die Blickrichtung von B über $P(x,y)$ nach L charakterisierenden Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{a} = \vec{r}_L - \vec{r} \text{ und } \vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_L.$$

Die Einheitsvektoren von \vec{a} und \vec{b} lauten:

$$\hat{a} = ((1-x)/a, -y/a, h_l/a), \text{ mit } a = \sqrt{(1-x)^2 + y^2 + h_l^2}.$$

$$\hat{b} = (x/b, y/b, -h_o/b), \text{ mit } b = \sqrt{x^2 + y^2 + h_o^2}.$$

Ihre Differenz ist gleich dem Normalenvektor

$$\vec{n} = \hat{b} - \hat{a}, = (x/b - (1-x)/a, y/b + y/a, -h_o/b - h_l/a). \text{ Daraus ergibt sich:}$$

$$\hat{n} = \vec{n}/n, \text{ mit } n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{2(1 + (x^2 + y^2 + xl + h_o h_l))/ab},$$

wie sich durch Einsetzen und einigen Umformungen ergibt. Gleichung (1) lautet somit:

$$\cos \alpha = n_z = -(h_o/b + h_l/a)/n = -(h_o a + h_l b)/(abn).$$

7. Literatur

- [1] SCHLICHTING, H. J.: Das „Schwert der Sonne“ - Alltägliche Reflexionen im Lichte eines einfachen optischen Phänomens. Teil 1: Überblick und Phänomene. MNU 51/7 (1998), S. xxx
- [2] DITTMANN, H./NÄPFEL, H./SCHNEIDER, W.B.: Die zerrechnete Physik. Physik und Didaktik 4 (1990), S. 287
- [3] MINNAERT, M.: Licht und Farbe in der Natur. Basel etc.: Birkhäuser 1992.
- [4] Ein Delphi- Programm für diesen Algorithmus wurde von U. BACKHAUS (Koblenz) entwickelt.
- [5] Ein Delphi Programm für diesen und die folgenden Algorithmen wurden von F. RATERING (Essen) entwickelt.