

Schöne fraktale Welt -

Annäherungen an ein neues Konzept der Naturwissenschaften

H. Joachim Schlichting

Sätze in einem Wort. Unendliche Sätze
Elias Canetti

Das Konzept des Fraktals stellt eine große Herausforderung für fast alle Bereiche der Naturwissenschaften und darüber hinaus dar. Gleichzeitig hat es wie kaum eine zweite naturwissenschaftliche Idee Publizität innerhalb einer breiteren Öffentlichkeit erfahren. Die Schulphysik kann sich diesen Entwicklungen nicht verschließen. Bisher erschienene Aufsätze haben sich meist mit einzelnen Aspekten der Fraktale befaßt. Der vorliegende Beitrag möchte in einer Art Überblick den inneren Zusammenhang zwischen den zahlreichen Facetten des Fraktals darstellen, ohne jedoch Vollständigkeit anzustreben. Dabei wird gleichzeitig versucht, die hinter der Idee des Fraktals stehende Anschauung zu skizzieren, wie sie sich unter anderem auch in nicht naturwissenschaftlichen Kontexten spiegelt.

More geometrico

Es gibt nichts Anthropomorpheres als die gerade Linie
Paul Valéry

Die Euklidische Geometrie ist eine der tragenden Säulen der klassischen Physik. Geometrische Figuren sind die Grundelemente physikalischer Objekte im tatsächlichen wie im metaphorischen Sinn; sie verleihen nicht nur technischen Gegenständen Gestalt, sie kennzeichnen auch in Form der platonischen Ideen

die Theorien und Vorstellungen des klassisch physikalischen Weltbildes. Galilei sieht in der Geometrie die Sprache der Natur:

"Die Philosophie ist in dem großen Buch der Natur niedergeschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt, dem Universum. Aber wir können es erst lesen, wenn wir die Sprache erlernt und uns die Zeichen vertraut gemacht haben, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, deren Buchstaben Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren sind; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen". (Galilei 1623).

Der Einfluß dieser Denkrichtung bis ins Alltagsleben karikiert Jonathan Swift ein Jahrhundert später anhand des Verhaltens der Menschen von Laputa:

Die Ideen jener Leute bilden sich stets nach...mathematischen Linien und Figuren. Wollen sie zum Beispiel die Schönheit einer Frau oder eines Tieres rühmen, so beschreiben sie sie durch Rhomben, Parallelogramme, Ellipsen und andere geometrische Begriffe. Oder an anderer Stelle: Die Diener zerschnitten das Brot in der Form von Kegeln, Zylindern, Parallelogrammen und anderen mathematischen Figuren (Swift 1726).

Aus euklidischer Perspektive besteht der wesentliche Aspekt der Weltbeschreibung in einer Rückführung auf und einer Rekonstruktion aus dem Grundelement der geraden Linie: Letztlich sind alle euklidischen Formen gerade oder glatt. Bei genügender Vergrößerung kann jede Kurve durch eine Gerade und jede Oberfläche durch eine Ebene approximiert werden. Die Landvermessung auf der Erde beruht auf der ebenen Geometrie. Selbst im Zuge der Abwendung von Geometrie und Anschaulichkeit, wie sie in der formalen Ausgestaltung der Newtonschen Physik zum Ausdruck kommt, bleibt die Linearisierung ein wesentliches Element der Komplexitätsreduktion im mathematisch physikalischen Denken. Mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz und Newton gelingt es zwar, auch allgemeinere, "krumme" Kurven und Flächen mathematisch zugänglich zu machen, man bleibt aber beschränkt auf Objekte, die letztlich - bei genügender Vergrößerung - stückweise durch eine Gerade angenähert werden können. Die darauf beruhende Eigenschaft der Differenzierbarkeit ist daher eine der grundlegenden Voraussetzungen der durch Differentialgleichungen bestimmten Physik.

Bleibt die Herrschaft der geraden Linie in der Physik noch weitgehend im Verborgenen, in der durch Naturwissenschaften geprägten Technik, der Architektur, dem Verkehrswesen und anderen kulturellen Aktivitäten findet sie ihren sichtbaren Ausdruck:

Diese Linearisierung nimmt Friedensreich Hundertwasser (1985) aufs Korn, wenn er feststellt, daß *"die gerade Linie ...etwas (ist), was man niederträchtig mit Hilfe eines Lineals zieht, ohne nachzudenken und ohne zu fühlen". Er sieht in der "geraden Linie...die einzige unschöpferische Linie, die einzige Linie, die dem Menschen, der nach dem Bild Gottes geschaffen wurde, fremd ist, ...in der Natur nicht existiert, ...zur absoluten Tyrannie geworden (ist)...und zum Untergang der Menschheit führt"*.

Im Bereich des Alltagslebens werden die negativen Wirkungen der geraden Linie nicht nur aus ästhetischer, sondern auch praktischer Sicht in zunehmendem Maße erkannt: Flussbegradigungen werden zurückgenommen, Straßenbegradigungen gestoppt, und die Streichholzschachtelbauweise von Wohnhäusern geht merklich zurück.

Auf der anderen Seite werden euklidische Selbstverständlichkeiten problematisch und wachsen sich zu handfesten Antinomien aus. 50 Jahre nachdem Franz Kafka in seinem Schloß am Beispiel des Landvermessers K. die Sicherheit der menschlichen Existenz auf grundsätzliche Weise infrage stellt, erreicht diese Unsicherheit die "euklidische" Landvermessung selbst. Schon bei einer so trivial erscheinenden Aufgabe wie der Feststellung der gemeinsamen Grenze zweier Länder stößt man auf unüberwindbare Schwierigkeiten, wenn man die Aufgabe nur einigermaßen ernst nimmt.

Beispielsweise findet man in einem portugiesischen Lexikon für die Grenze zu Spanien eine Längenangabe von 1214 km. In einem spanischen Lexikon wird die Grenze zu Portugal jedoch nur mit einer Länge von 987 km angegeben. Das ist weder ein Druckfehler noch ein Zufall- für andere Länder lassen sich entsprechende Unterschiede finden - sondern der Hinweis auf eine tiefssitzende Antinomie im klassischen Weltbild.

In seinem Aufsatz: "Wie lang ist die Küste Britanniens?" gelingt Benoît Mandelbrot zwar eine Lösung dieses Landvermessungsproblems, jedoch auf ganz andere Weise als man es aus euklidischer Sicht erwartet hätte: Die Lösung bildet nicht nur die Schwelle zu einer neuen Geometrie, der fraktalen Geometrie der Natur, sondern auch zu einem neuen naturwissenschaftlichen Weltbild.

Wenn Galilei die obige Aussage seinem Sagredo in den Mund gelegt hätte, so wäre eine Replik Simplicius' denkbar gewesen, die etwa folgendermaßen hätte lauten können: "Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade." Sie stammt aber nicht von Simplicius, sondern von Mandelbrot (1987), der mit diesen Worten ein Prinzip attackiert, das die Physik seit Galilei weitgehend bestimmt hat: die Idealisierung der zu beschreibenden Wirklichkeit bis zur Unkenntlichkeit. So gesehen ist in diesen Worten auch die Hoffnung enthalten, der Empirie des unmittelbaren Augenscheins wieder größeres Gewicht zu verleihen.

Wie lang ist die Küste Britanniens?

Alles was zählte, spielte sich auf der sich auflösenden Linie zwischen Land und Wasser ab mit der Folge einer bis an die Grenzen des Faßlichen schwellenden wirklichen Länge.

Volker Erbes

Das Problem der Land- bzw. Küstenvermessung wird sofort deutlich, wenn man sich vor Augen führt, wie eine solche Vermessung praktisch aussehen könnte. Man beginnt beispielsweise damit, daß man mit Hilfe von Satellitenaufnahmen zunächst eine grobe Abschätzung vornimmt, indem man einen Polygonzug ausmisst, der durch Verbindung von 1000km voneinander entfernt liegenden Punkten auf der Küstenlinie entsteht. Anschließend reduziert man den Maßstab derart, daß sich ein Polygonzug mit 100 oder sogar nur 10km voneinander entfernt liegenden Punkten ergibt. Man erwartet, daß die Länge dieses verfeinerten Polygonzugs der "wahren Länge" der Küste bereits ziemlich nahe kommt. Es zeigt sich jedoch, daß weitere Verfeinerungen des Maßstabs bis hinab zur Größe der wasserumspülten Sandkörnchen die Länge der Küste ins "Uferlose" hinausschieben. Die Küsten- bzw. Landesgrenzenlänge ist also keine Größe im gewohnten Verständnis. Ihr Wert hängt von der zugrundegelegten Genauigkeit bzw. vom Maßstab ab. Die Brisanz dieses Befundes könnte man mit der Behauptung umschreiben: Alle Küsten und Landesgrenzen sind gleich lang.

"Auf der Grenze liegen immer die seltsamsten Geschöpfe" (Lichtenberg). Das sollte auch der Mathematiker Helge Koch im Jahre 1904 erfahren, als er eine Kurve konstruierte, mit der das Küsten- oder Landesgrenzenproblem modellmäßig auf den Punkt gebracht werden kann. Die ihrer Gestalt nach so genannte Schneeflocken-

kurve (Abb.2) entsteht folgendermaßen: Zunächst wird ein gegebenes Liniensegment in drei gleichlange Teile zerlegt und das mittlere Drittel durch das "Dach" eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt. Sodann wird jedes der sich ergebenden Teilstücke, derselben Teilungsprozedur unterworfen usw. ad infinitum.

Dieses seltsame Geschöpf eines Mathematikers ist nicht differenzierbar, es besitzt in keinem Punkt eine Tangente und kann nicht auf die gerade Linie zurückgeführt werden. Solche Monster (Mandelbrot) wurden zur Zeit ihrer Entdeckung als anti-intuitiv und pathologisch angesehen und gerieten in Vergessenheit, um erst in unseren Tagen mit einem neu geschärften Blick vor allem durch Mandelbrot wieder ans Tageslicht geholt zu werden.

Die Kochsche Schneeflockenkurve zeichnet sich ebenso durch das Fehlen eines natürlichen Maßstabs aus wie natürliche Landesgrenzen und Küstenlinien: Sie besitzen durch alle Maßstäbe hindurch eine gleichartige Struktur. Wie weit man sich auch durch sukzessive Ausschnittsvergrößerungen in die Tiefen dieser Kurve "hineinzoomen" mag, der Anblick bleibt stets derselbe; nie landet man bei einem nichtzerfransten geraden Segment: "Alles ist sich gleich, ein jeder Teil repräsentiert das Ganze" (Lichtenberg).

Diese in naheliegender Weise so genannte Selbstähnlichkeit kommt beispielsweise dadurch zum Ausdruck, daß man ohne Anhaltspunkte für einen absoluten Maßstab (z.B. Pflanzenbewuchs an der Küste) nicht zu entscheiden vermag, ob man vom Flugzeug aus auf die Küste blickt oder sie aus nächster Nähe betrachtet. Als weiteres Beispiel mag der Flug über den Wolken dienen. Da eine kleine Wolke wie eine große aussieht, hat man meist keine Möglichkeit, einen Eindruck von der Entfernung zur Wolkendecke zu gewinnen. Das zeigt sich zuweilen darin, daß man aufgrund anderer Hinweise bemerkt, daß das Flugzeug sinkt, der Anblick der Wolken sich aber kaum ändert. Auch von Wirbeln, die hinter einem Objekt im fließenden Wasser entstehen, kennt man seit langem, daß sie ebenfalls aus einer ganzen Hierarchie ineinandergeschachtelter Wirbel aufgebaut sind. Mit anderen Worten:

*Big whirls have little whirls,
That feed on their velocity; And little whirls
Have lesser whirls,
And so on to viscosity"*

Richardson 1920

Oder, dasselbe in den Worten des Mathematikers Augustus de Morgan in Abwandlung eines Verses von Jonathan Swift:

*"Great fleas have little fleas
Upon their backs to bite 'em,
And little fleas have lesser fleas,
And so ad infinitum.
And the great fleas, themselves in turn,
Have greater fleas to go on;
While these again have greater still,
And greater still, and so on."*

Das ad infinitum ist allerdings wieder eine typische mathematische Übertreibung wie sie in der Realität nicht auftritt. Darin äußert sich ein wesentlicher Unterschied zwischen Modell und Wirklichkeit. Während man sich der infinitesimalen "Brüchigkeit" der Kochschen Schneeflockenkurve wenn schon nicht darstellungsmäßig, so doch wenigstens prozessual gedanklich annähern kann, stößt man bei realen Strukturen, Küstenlinien, Wolken, Wirbeln u.ä. irgendwann einmal auf das "körnige" Substrat, das spätestens durch die mikroskopischen Bausteine gegeben ist. Die Selbstähnlichkeit in realen Systemen erstreckt sich nur über eine endliche "Tiefe".

Ein weiterer Unterschied zwischen realen und mathematischen Fraktalen besteht im "Grad" der Ähnlichkeit. Während die schrittweise Vergrößerung von Abschnitten der Kochschen Kurve stets zu exakt derselben Struktur führt, zeigt sich bei der Vergrößerung von Küstenlinienausschnitten nur eine statistische Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Ausschnitten, die allerdings so weitgehend ist, daß auch sie keine Rückschlüsse auf einen Maßstab erlaubt und das Prinzip der Skaleninvarianz erfüllt.

Die Idee, die Natur mit Hilfe skaleninvarianter Systeme sich wiederholender ähnlicher Muster zu beschreiben, findet man im abendländischen Denken von Anfang an vor. Anaxagoras (1968) weist beispielsweise darauf hin, daß es "von dem Kleinen... immer noch ein Kleineres gibt. Aber auch von dem Großen gibt es immer noch ein Größeres. Und es ist gleich dem Kleineren an Menge; an sich aber jedes Ding sowohl groß wie klein". Konnte er ahnen, daß die Wissenschaftler dereinst mit Hilfe der Linse und deren nichtoptischen Nachfolgern auf Hier-

archien ähnlicher Strukturen stoßen würden, wie weit sie sich auch hinab in den Mikrokosmos der Atome und Elementarteilchen oder hinaus in den Makrokosmos der Sonnensysteme und Galaxienclustern vorwagen möchten? Auch Leibniz (1933) hatte bereits in ausdruckstarken Bildern auf die Skaleninvarianz und Selbstähnlichkeit hingewiesen, die sich hinter der scheinbar "verworrenen Bewegung und dem Gewimmel" der Realität verbirgt: "Die Maschinen der Natur..., d.h. die lebenden Körper, sind noch in ihren kleinsten Teilen, bis ins Unendliche hinein, Maschinen...Jedes Stück Materie kann gleichsam als ein Garten voller Pflanzen oder als ein Teich voller Fische aufgefaßt werden. Aber jeder Zweig der Pflanze, jedes Glied des Tieres, jeder Tropfen seiner Säfte ist wieder ein solcher Garten und ein solcher Teich... So gibt es nichts Ödes, nichts Unfruchtbaren, nichts Totes im Universum, kein Chaos, keine Verwirrung außer dem Anschein nach".

Selbst im Bereich künstlerischer und literarischer Darstellungen hat die Idee der Selbstähnlichkeit immer wieder Faszination. So lässt beispielsweise Aldous Huxley in seinem Roman "Kontrapunkt des Lebens" Philip Quarles einen Roman über einen Romancier schreiben, der einen Roman schreibt usw. Auch in Andre Gides "Falschmünzer" oder E. Cummings Theaterstück "Him" ist dieses Motiv vorhanden. Sogar die Werbung hat sich eine Zeit lang dieses formalen Prinzips bedient: "Als Kind kroch ich immer in die Bilder auf Reklamen, wo Kinder Kekse aus einer Büchse naschen, Mütter Suppe aus einer Packung auftischen, auf der sich das gleiche Bild wiederholt, ins Unendliche. Manchmal konnte ich noch ein fünftes oder gar sechstes Kind ausmachen, eine vierte Mutter, die der Familie lächelnd die Suppe aufzwang, ich wußte, daß es da nicht endet - so viele Kekse konnte die Fabrik niemals backen! Ich frage dich: wenn jedes Kind eine Büchse mit zwanzig Keksen hält- und das Ganze wiederholt sich unendlichmal, wovon gibt es mehr, Kinder oder Kekse, Mütter oder Suppenwürfel?" (Monikova 1986).

Während man bei zeichnerischen und schriftlichen Darstellungen die realen Begrenzungen wenigstens noch gedanklich überwinden kann, stößt man bei ineinander verschachtelten russischen Puppen jedoch sehr schnell an die durch die Realität vorgegebenen Grenzen.

Das Muster, das verbindet

*Jedes Existierende ist ein Analogon allen Existierenden;
daher erscheint uns das Dasein immer zu gleicher Zeit gesondert und verknüpft.*

J.W.v. Goethe

Die Untersuchung fraktaler Strukturen beinhaltet insofern eine Abkehr von der fachsystematisch orientierten Forschung, als der Blick gewissermaßen quer durch alle Disziplinen hindurch gerichtet wird auf das Muster, das die verschiedensten Strukturen sowohl räumlicher als auch zeitlicher Art verbindet. Dies führt beispielsweise dazu, daß die Zeitaufnahme eines Blitzes verglichen wird mit den Baumstrukturen der Blutgefäße oder dem chaotischen Verhalten eines physikalischen Systems, wie es sich in der Phasenraumdarstellung eines chaotischen Attraktors manifestiert.

Welche neuen Aspekte der Blick auf die fraktalen Eigenschaften von Systemen liefern kann, sei an einem Beispiel aus dem Bereich des tierischen Stoffwechsels demonstriert: Eine wichtige Rolle spielt dabei die von einem Tier pro Zeiteinheit mit den Nahrungsmitteln aufgenommene Energie, die sogenannte Stoffwechselintensität P . Da die Energieversorgung des Organismus allen Zellen, also dem gesamten Körpervolumen dient, könnte man naiverweise erwarten, P müßte proportional zur Köpermasse m variieren. Diese Annahme lässt sich aber leicht durch den Hinweis relativieren, daß die Versorgung des Organismus mit Nahrungsmitteln und Sauerstoff durch die Oberflächen erfolgt, die die jeweiligen Volumina begrenzen. Flächen wachsen aber "langsamer" mit zunehmender Masse als Volumina, weshalb vielmehr eine Proportionalität von P zu $m^{2/3}$ zu erwarten sein sollte. Diese lange Zeit für gültig gehaltene Rubnersche Flächenregel mußte jedoch schließlich fallengelassen werden. Sorgfältige empirische Untersuchungen zeigten, daß P über fast fünf Zehnerpotenzen, von den größten bis zu den kleinsten Tieren wie $m^{3/4}$ variiert. Außerdem stellte man fest, daß isolierte Körperzellen unabhängig von der Masse des jeweiligen Tieres gleiche Energieumsatzraten besitzen, die Stoffwechselintensität P also maßstabsunabhängig, skaleninvariant ist.

Diese Formel ist bis heute unverstanden geblieben. Im Rahmen der fraktalen Geometrie bietet sich nunmehr die Erklärung an, daß die für die Stoffwechselmechanismen wesentlichen Organe wie Lunge, Blutgefäße und Darmsystem fraktale Eigenschaften besitzen: Durch eine Art fraktaler Faltung, ähnlich wie bei der Kochschen Kurve, gelingt es offenbar, das Flächenhafte zu übertreffen ohne das Volumenhafte zu erreichen (vgl. Sernetz et al. 1985).

Natürlich kann man von einem realen Organ nicht erwarten, daß es durch eine solche Faltung eine unendlich große Fläche realisiert. Die Tatsache, daß die menschliche Lunge auf einem relativ kleinen Volumen immerhin eine Fläche von 100 m² und das Darmsystem eine Fläche von 200 m² entfaltet, kommt diesem Ideal allerdings erstaunlich nahe. Die fraktale Selbstähnlichkeit von Lunge und Blutgefäßen offenbart sich rein anschaulich dadurch, daß diese Organe durch zahlreiche Vergrößerungen hindurch dieselbe Baumstruktur besitzen: Jede Ader hat wieder Adern, die ihr zur Unterhaltung dienen, und diese kleinen haben wieder andere (Lichtenberg).

Das hierin zum Ausdruck kommende Prinzip der optimalen Anpassung zwischen verschiedenen "Medien" liegt vielen fraktalen Gebilden in der Natur zugrunde. Bei den botanischen Bäumen geht es oberirdisch um eine möglichst optimale Ausnutzung der Oberfläche des durch den Baum beanspruchten Volumens zur Absorption von Licht einerseits und Austausch von Stoffen (z.B. Wasser, CO₂ und O₂) andererseits. Unterirdisch sorgt das fraktale Wurzelgeflecht für eine möglichst große flächenmäßige Erschließung des Erdreichs zur Gewinnung von Wasser und Mineralstoffen.

Fraktale Dimension

Könnte ich nur meinen Arm hinausstoßen über die Grenzen, die ihm gesetzt sind..., so könnte ich in tausend Dimensionen reichen.

H.G. Wells

Wie läßt sich die in vielen Beispielen qualitativ zum Ausdruck kommende Überwindung der topologischen Dimension aufgrund fraktaler Selbstähnlichkeit quantitativ untermauern?

So merkwürdig die Eigenschaften der Küstenlinien, Landesgrenzen und der Kochschen Kurve auch anmuten, sie finden sich trivialerweise und daher ohne besondere Bedeutung erlangt zu haben, in zahlreichen bekannten geometrischen Objekten wieder, beispielsweise in einer Linie.

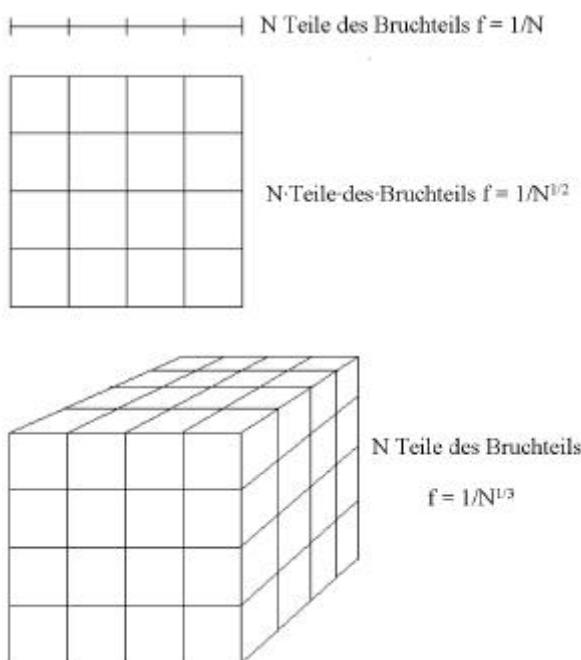


Bild 1: Zur Einführung der fraktalen Dimension

Teile zerlegt wurde, von denen jedes $f = 1/3$ der ursprüngliche Länge besitzt. Damit ergibt sich gemäß obiger Gleichung eine Dimension von $D = \ln 4/\ln 3 = 1,26$, also eine gebrochene oder nach Mandelbrot fraktal genannte Dimension D. Fraktale interpolieren gewissermaßen zwischen den euklidischen Räumen. Die fraktale Dimension geht insofern über die bloße "Container"- Eigenschaft der topologischen Dimension hinaus, als sie eine Charakterisierung der Objekte selbst ermöglicht. Eine gebrochene Dimension zwischen 1 und 2 charakterisiert ein hybrides Objekt zwischen Linie und Fläche. Dies ist mehr als ein formaler Trick: Die bis ins Unendliche getriebene Fragmentierung und Faltung beispielsweise der Kochschen Kurve macht auch auf anschauliche Weise deutlich, daß dieses Gebilde mehr ist als eine Linie, da jeder Kurvenabschnitt unendlich lang ist, aber weniger als eine Fläche, da es zu keiner Verschmelzung bzw. Überschneidung der Faltungen kommt und

Eine Linie kann in n identische Teile zerlegt, also um den Faktor $f = 1/N$ verkleinert werden, und sie bleibt trotzdem eine Linie. Leibniz benutzte übrigens diese Selbstähnlichkeit zur Definition einer Linie. Auch bei zwei und dreidimensionalen Figuren findet man eine entsprechende Skaleneigenschaft. Zerlegt man etwa ein Quadrat in N identische Teilquadrate, so wird jedes dieser Teile auf den Bruchteil $f = 1/N^{1/2}$ des ursprünglichen Quadrats verkleinert; und die N Miniaturwürfel, die sich bei einer entsprechenden Zerlegung eines Würfels ergeben, werden auf $f = 1/N^{1/3}$ herunterskaliert (Abb.1). Ein solcher Skalierungsfaktor f beschreibt die Größenvariation der (selbstähnlichen) Objekte bei Ähnlichkeitstransformation und hängt offenbar eng mit dessen topologischer Dimension D_t zusammen. Da wir hier nur von der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit Gebrauch gemacht haben, liegt es nahe, einen entsprechenden Zusammenhang auch für andere selbstähnliche Strukturen wie beispielsweise der oben erwähnten Kochschen Kurve zugrundezulegen:

Die Kochsche Kurve (Abb.2) wurde dadurch generiert, daß ein Liniensegment in N = 4 identische

der Flächeninhalt demnach Null ist. Sogar die in dem Zahlenwert zum Ausdruck kommende Quantifizierung hat einen anschaulichen Aspekt: Einer vielfältigeren Fragmentierung entspricht eine höhere Dimension. Das läßt sich beispielsweise durch einen Vergleich der Schneeflockenkurve (Abb. 2a) mit der quadratischen Kochschen Kurve (Abb. 2b) erkennen. Man kann auf diese Weise sogar Kurven finden, die die nächst

höhere topologische Dimension 2 annehmen. Ein Beispiel ist die ursprünglich auf Peano zurückgehende Variante einer quadratischen Kochschen Kurve (Abb. 2c), die die Ebene mit einem immer enger werdenden Gitternetz überzieht und daher auch anschaulich als ebenenfüllend anzusehen ist. Hier zeigt sich auf eindrückliche Weise, daß die fraktale Dimension stets größer ist als die topologische Dimension des zugrundeliegenden euklidischen Elements. Sie kann im Extremfall die nächst höhere topologische Dimension erreichen.

Welt als Konstrukt: Simulation fraktaler Strukturen

Daß es einen Ritter gibt, der nicht existiert, macht mir, offen gestanden, Angst...

*Und doch bewundere ich ihn; in allem was er tut,
ist er so vollendet; er flößt mehr Sicherheit ein, als wenn es ihn wirklich gäbe..*

Italo Calvino

Einfache Linienfraktale

Die Selbstähnlichkeit der Kochschen Kurven kommt durch die Wiederholung desselben Strukturelementes durch alle Maßstäbe hindurch zustande. Dieses einfache Bauprinzip macht es möglich, auf rekursive Weise weitere fraktale Strukturen zu konstruieren: Der Ausgangspunkt ist stets ein euklidisches Grundelement, ein sogenannter Initiator (z.B. eine Linie oder ein Quadrat), aus dem durch eine meist einfache Vorschrift ein sogenannter Generator geformt wird. Den Generator läßt man auf den Initiators wirken, der dadurch entsprechend verformt wird (Abb. 2). Auf dieses Gebilde wird dann der Generator erneut angewandt usw. Mit jeder Iteration nimmt sowohl die Zerkleinerung bzw. Detailliertheit als auch die "Länge" der fraktalen Struktur zu.

Interessant und typisch für Fraktale ist jedoch, daß es trotz dieses sowohl hinsichtlich der Beschreibung als auch hinsichtlich der Erzeugung einfachen Algorithmus keinen analytischen Ausdruck zur Bestimmung ein-

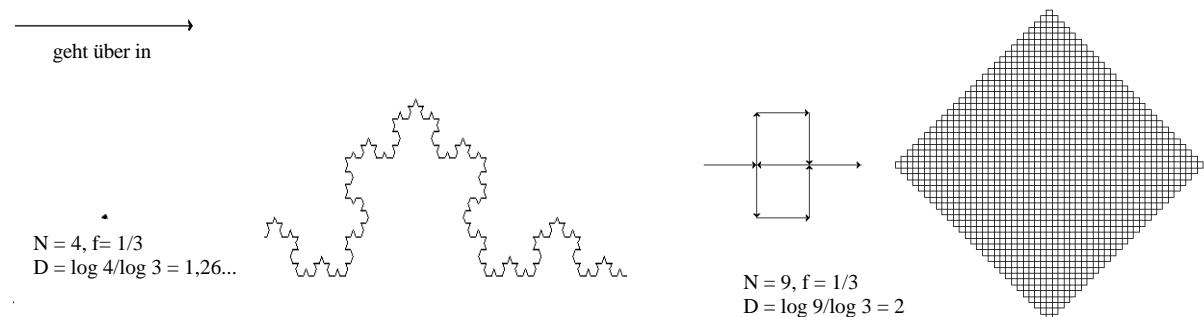
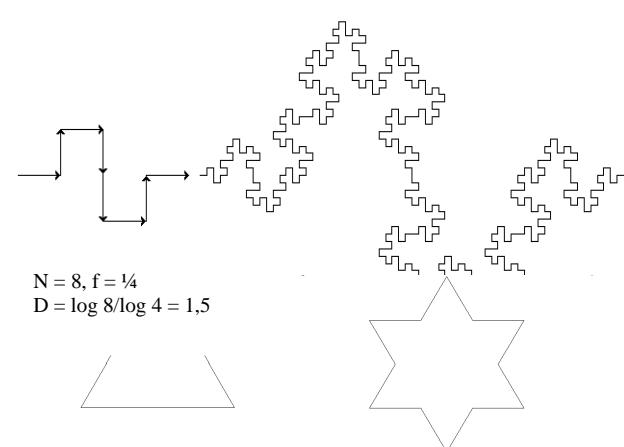


Bild 2: Linienfraktale: Initiator ist ein Liniensegment, auf das der jeweils darunter liegende Generator angewandt wird und das rechts danebenstehende Fraktal liefert. N gibt die Zahl der Streckenabschnitte an, in die das Segment zerlegt wird, f die Länge des Abschnitts als Bruchteil der Länge des Initiators.



zelner Kurvenpunkte gibt. Die Einfachheit der Er-

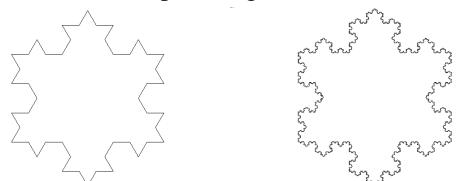


Bild 3: Genese der Kochschen Insel. Initiator ist ein gleichseitiges Dreieck. Der Generator wirkt nach außen faltend auf die Streckenabschnitte.

zeugung der fraktalen Gebilde erinnert an die Erzeugung eines Kristallgitters. Der Translationsinvarianz des Gitters entspricht die Skaleninvarianz des Fraktales, welche sich somit als eine Art Symmetrieeigenschaft an sich unsymmetrischer, ungeordneter Gebilde erweist.

Dendritisches Wachstum

Den vielfältigen "Aufgaben" realer Strukturen, insbesondere biologischer Systeme, werden solche einfachen Wachstumsalgorithmen allein nicht gerecht. Da sie stets zu identischen Gebilden führen, können sie nicht auf die zufallsbestimmten Änderungen der Umwelt- und Lebensbedingungen reagieren. Dies muß aber als eine für das Überleben realer Systeme notwendige Voraussetzung angesehen werden: Die Notwendigkeit deterministischer Wachstumsregeln muß mit der Zufälligkeit konkreter Einflüsse gekoppelt werden. Ein äußerst einfaches Modell, in dem diese Bedingungen in elementarer Weise erfüllt werden, ist von Witten und Sander (1981) zur

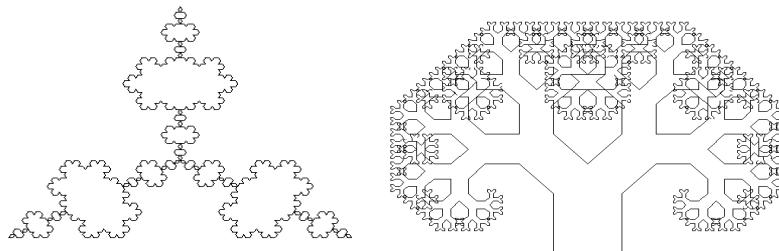


Bild 4: Weitere einfache Linienfraktale. A) Die Kochsche Schneeflocke geht aus einem Dreieck hervor, auf dessen Seiten der Kochsche Generator nach innen wirkt. B) Der Pythagoras-Baum geht aus einer hausförmigen Figur hervor, auf dessen „Dachschrägen“ jeweils entsprechend verkleinerte „Hauser“ aufgesetzt werden.

solcher Diffusionsvorgang wird beliebig oft wiederholt. Während sich die ersten Teilchen rein zufällig an den verschiedenen Seiten des Keims anlagern und dadurch kleine Auswüchse hervorrufen, ist die Wahrscheinlichkeit größer, daß die von außen herandiffundierenden Teilchen, an diesen Auswüchsen hängenbleiben, als daß sie in die "Fjorde" eindringen.

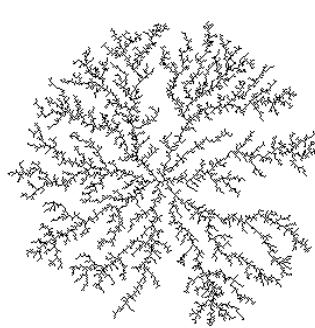


Bild 5: Witten- Sander- Modellcluster.

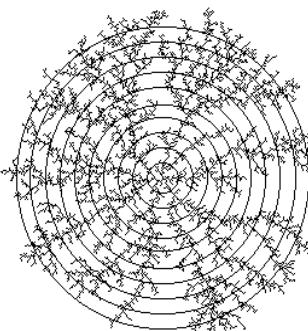


Bild 6: Zur Berechnung der fraktalen Dimension werden die innerhalb der verschiedenen Kreise liegenden Pixel ausgezählt.

klüftete Gestalt der entstehenden Strukturen zwar vorprogrammiert, die konkrete Ausgestaltung ist jedoch Sache des Zufalls. Auffallend ist, daß durch viele Ausschnittsvergrößerungen hindurch statistisch ähnliche Äste auftreten (Selbstähnlichkeit).

Die fraktale Dimension dieses Clusters läßt sich sehr einfach durch das sogenannte box-counting - Verfahren ermitteln. Dabei wird von dem für Fraktale charakteristischen Zusammenhang zwischen Masse M (Zahl der Teilchen) eines (Flächen-) Ausschnitts der Größe R (hier: konzentrische Kreisscheiben um den Ursprung vom Radius R) und der Dimension D , $M \sim R^D$, ausgegangen (Abb. 6), der unabhängig von R gilt. Dazu trägt man die Größe R der Flächenausschnitte gegen die jeweilige Masse der Flächenausschnitte (Zahl der Teilchen) doppeltlogarithmisch auf. Die Steigung der die Punkte verbindenden Ausgleichsgeraden liefert dann den Wert der

Simulation diffusionsgesteuerter Wachstumsprozesse entwickelt worden. Im zweidimensionalen Fall wird ein Teilchen im Ursprung eines Koordinatensystems fixiert. Dann läßt man ein zweites Teilchen von einem zufällig ausgewählten Punkt auf einem großen, um den Ursprung gezogenen Kreis "starten" und einen random walk ausführen, bis es den "Keim" im Ursprung erreicht und daran kleben bleibt. Ein

solcher Diffusionsvorgang wird beliebig oft wiederholt. Während sich die ersten Teilchen rein zufällig an den verschiedenen Seiten des Keims anlagern und dadurch kleine Auswüchse hervorrufen, ist die Wahrscheinlichkeit größer, daß die von außen herandiffundierenden Teilchen, an diesen Auswüchsen hängenbleiben, als daß sie in die "Fjorde" eindringen.

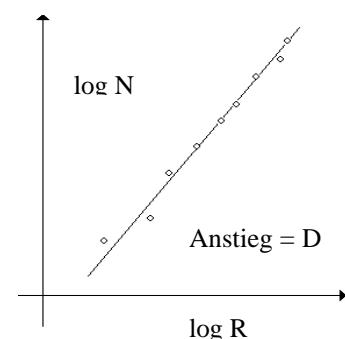


Bild 7: Ausgleichsgerade zur Ermittlung der fraktalen Dimension.

Damit ist die dendritische, zerklüftete Gestalt der entstehenden Strukturen zwar vorprogrammiert, die konkrete Ausgestaltung ist jedoch Sache des Zufalls. Auffallend ist, daß durch viele Ausschnittsvergrößerungen hindurch statistisch ähnliche Äste auftreten (Selbstähnlichkeit).

Dimension (Abb. 7). Sie beträgt im vorliegenden Falle $D = 1,7$. Entsprechende Rechnungen im Dreidimensionalen führen zu einem Wert $D_3 = 2,5$.

Iterierte Funktionensysteme

Im allgemeinen gibt es verschiedene Rekursionsverfahren zur Konstruktion eines Fraktales. Beispielsweise lässt sich der sogenannte Sierpinski- Teppich sowohl durch das Initiator- Generator Konzept gewinnen als auch durch das in Abb. 9 dargestellte Verfahren des sukzessiven Herausschneidens von Dreiecken aus den jeweils zurückbleibenden Teildreiecken des Ausgangsdreiecks.

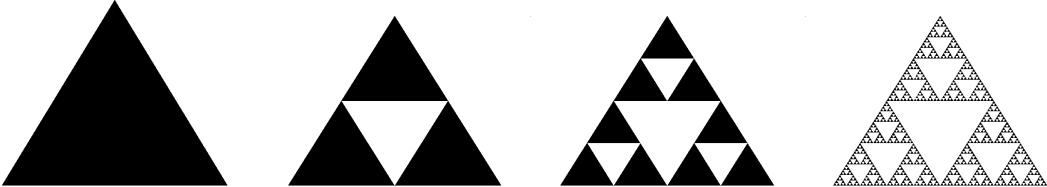


Bild 8: Genese des Sierpinski- Teppichs durch Herausschneiden von Dreiecken aus den jeweils zurückbleibenden Dreiecken.

Interessanter ist jedoch das von Michael Barnsley vorgeschlagene Chaossalpiel, das mit Hilfe eines Würfels zum Sierpinski - Teppich führt. Ausgangspunkt sind die drei Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks und ein beliebiger weiterer Punkt in der Ebene. Jedem Dreieckspunkt ordnet man jeweils zwei Augenzahlen des Würfels zu; beispielsweise Punkt A die Augenzahlen 1 und 6, Punkt B die 4. Die Entfernung zwischen dem (beliebigen) Startpunkt 0 und dem erwürfelten Dreieckspunkt wird halbiert (Abb. 10a). Die Entfernung von diesem Punkt 1 zur nächsten erwürfelten Seite wird wieder halbiert usw. Nach sehr vielen Wiederholungen tritt allmählich der Sierpinski- Teppich schemenhaft hervor (Abb. 10b), um sich schließlich immer mehr der Idealgestalt anzunähern (Abb. 10c).

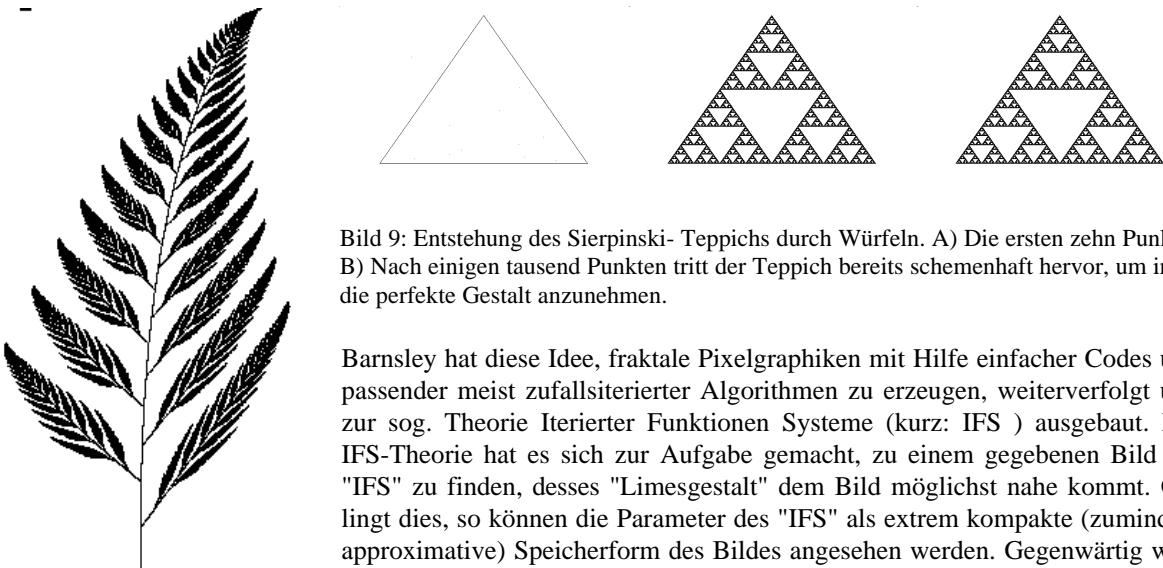


Bild 9: Entstehung des Sierpinski- Teppichs durch Würfeln. A) Die ersten zehn Punkte. B) Nach einigen tausend Punkten tritt der Teppich bereits schemenhaft hervor, um in c) die perfekte Gestalt anzunehmen.

Bild 10: Aus der IFS- Retorte hervorgegangener Farnwedel.

Barnsley hat diese Idee, fraktale Pixelgraphiken mit Hilfe einfacher Codes und passender meist zufallsiterierter Algorithmen zu erzeugen, weiterverfolgt und zur sog. Theorie Iterierter Funktionen Systeme (kurz: IFS) ausgebaut. Die IFS-Theorie hat es sich zur Aufgabe gemacht, zu einem gegebenen Bild ein "IFS" zu finden, desses "Limesgestalt" dem Bild möglichst nahe kommt. Gelingt dies, so können die Parameter des "IFS" als extrem kompakte (zumindest approximative) Speicherform des Bildes angesehen werden. Gegenwärtig wird an einem "Rezept" zu einer solchen Bildcodierung experimentiert, die u.a. auch für die Nachrichtentechnik Bedeutung erlangen könnte. . Einen Eindruck von den Möglichkeiten der IFS vermittelt Abb. 11, in der das "Produkt", eines einfachen IFS- Codes dargestellt ist (Weitergehende Information zur IFS- Theorie siehe z.B. Barnsley in: Peitgen et al.1988; Barnsley 1988).

Ein weiteres erfolgreiches Konzept zur computergraphischen Nachbildung fraktaler Gebilde ist u.a. von P. Prusinkiewicz auf der Grundlage von Ideen A. Lindenmayers entwickelt worden. Mit Hilfe dieser sog. L- Systeme gelingt es, vor allem Pflanzen und Blumen mit verblüffender Ähnlichkeit der Wirklichkeit nachzubilden (vgl. Barnsley 1988; Prusinkiewicz 1986).

Das Apfelmännchen

Die Generierung von Fraktalen ist nicht beschränkt auf geometrische Regeln und Figuren. Ein Fraktal kann auch das Ergebnis einer (nichtlinearen) mathematischen Abbildung sein. Das wohl berühmteste Beispiel eines

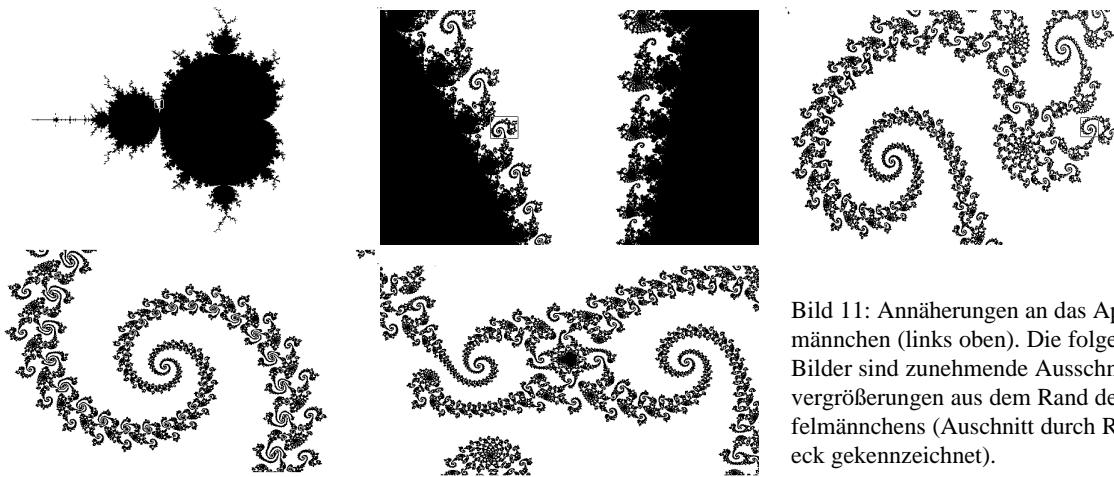


Bild 11: Annäherungen an das Apfelmännchen (links oben). Die folgenden Bilder sind zunehmende Ausschnittsvergrößerungen aus dem Rand des Apfelmännchens (Ausschnitt durch Rechteck gekennzeichnet).

Fraktales, das auf diese Weise erzeugt wurde, ist das von Benoit Mandelbrot "erfundene" und aufgrund seines äußerlichen Erscheinungsbildes sogenannte Apfelmännchen. Ihm liegt die einfache Formel $z_{n+1} = z_n^2 + c$ zugrunde, wobei z und c komplexe Zahlen sind. Was geschieht, wenn man für alle Werte der durch c aufgespannten Ebene jeweils bei $z_0 = 0$ beginnend die Formel immer wieder mit ihrem Ergebnis "füttert" (mathematische Rückkopplung)? Man wird feststellen, daß das Ergebnis für gewisse c konvergiert und für die restlichen c divergiert. Färbt man die Punkte, für die Konvergenz vorliegt, schwarz, so gelangt man zu dem in Abbildung 12a dargestellten Apfelmännchen. Das Besondere an dieser Figur ist, daß der Rand nicht glatt ist, sondern fraktal und bei näherem "Hinsehen", durch entsprechende Vergrößerungen einen unerschöpflichen Reichtum von selbstähnlichen Mustern und Strukturen offenbart. Die Abbildungen 12 b-e sollen davon einen kleinen Eindruck vermitteln. Variiert man auf dieselbe Weise die Anfangswerte bei jeweils festen c -Werten, so kommt man zu teilweise sehr filligranen Strukturen, die nach ihrem Entdecker Gaston Julia Julia Mengen genannt werden (Abb. 13).

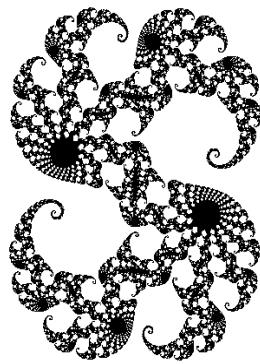


Bild 12: Zum Apfelmännchen gehörige gefüllte Julia-Menge.

Höherdimensionale Fraktale

Ohne auf Details einzugehen, sei erwähnt, daß es in voller Analogie zu den Linienfraktalen auch höherdimensionale Fraktale gibt. Erwähnt seien hier nur die Flächenfraktale. Ähnlich wie die Länge der Küstenlinien vom gewählten linearen Maßstab abhängt, variiert die Fläche eines Flächenfraktals mit der Größe des flächenhaften Maßstabs, beispielsweise quadratischer Meßflächen, mit denen man die "Fläche" des Fraktals ausmessen kann. Ein bekanntes Beispiel eines Flächenfraktals ist Aktivkohle. Ihre Oberfläche läßt sich über die Adsorption von Gasen mit unterschiedlich "großen" Molekülen abtasten. Trägt man dann die jeweils adsorbierte Gasmenge gegen die Moleküloberfläche doppeltlogarithmisch auf, so läßt sich aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden die fraktale Dimension ermitteln (Abb. 14). Die fraktale Dimension eines Flächenfraktals variiert je nach der "Luftigkeit" des Gebildes zwischen 2 und 3.

Fraktale Strukturen im Schulexperiment

"Why", said the Dodo, "the best way to explain it is to do it".

Lewis Carroll

Simulationen von Fraktalen sind natürlich kein Selbstzweck. Sie dienen dazu, Bildungsgesetze und Struktur realer fraktaler Gebilde zu erschließen. Für den Physikunterricht ergibt sich daraus das Problem, reale Fraktale experimentell darzustellen, die sich mit entsprechenden Computersimulationen vergleichen lassen und deren fraktale Dimension bestimmt werden kann.

Viskoses Verästeln

Ein besonders einfaches Exemplar eines solchen Fraktals soll im folgenden skizziert werden: Durchdringt eine weniger viskose Flüssigkeit (z.B. Wasser) eine Flüssigkeit mit höherer Viskosität (z.B. Öl), so lässt sich die Entwicklung dendritischer Verästelungen beobachten. Eine systematische Untersuchung dieser Strukturbildung gelingt mit einer leicht herzustellenden (radialen) Hele- Shaw- Zelle. Diese Zelle besteht aus zwei an den Rändern zusammengeschraubten durchsichtigen Platten (z.B. Plexiglas), von denen die obere in der Mitte ein kleines Loch enthält. Preßt man z.B. mit einer Einwegspritze durch dieses Loch nacheinander eine mehr und eine weniger viskose Flüssigkeit zwischen die Platten, so durchdringen sich die Flüssigkeiten unter Ausbildung (je nach Flüssigkeit) mehr oder weniger stark strukturierter Verästelungen: In Abb. 15 sind Verästelungen dargestellt, wie sie entstehen, wenn man a) flüssige Seife und b) Rizinusöl mit gefärbtem Wasser durchsetzt. Durch Ermittlung der "Fläche" der Struktur (z.B. durch Auszählen

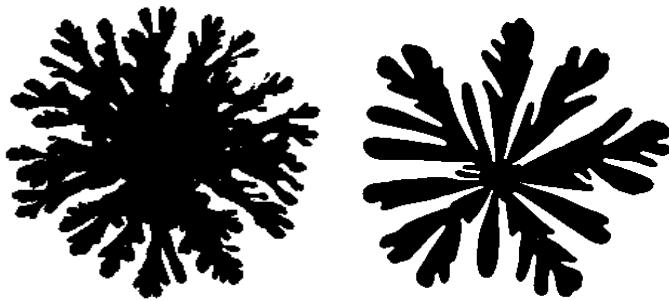


Bild 13: a) Stark verzweigte Struktur, durch Injektion von (gefärbtem) Wasser in flüssige Seife hervorgerufen. Die fraktale Dimension berechnet sich zu 1,85. b) Weniger stark verzweigt Struktur, durch Injektion von (gefärbtem) Wasser in Rizinusöl. Die fraktale Dimension berechnet sich zu 1,83.

mit Hilfe von Millimeterpapier oder mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms, das man auf die digitalisierten (gescannten) Bilder der Strukturen anwendet,) lässt sich wie bei den Witten- Sander- Mustern die fraktale Dimension der Gebilde ermitteln.

Lichtenbergfiguren

Obwohl physikalisch völlig verschieden, entstehen auch die bereits von G.Chr. Lichtenberg (1972) entdeckten Staubfiguren, nach ähnlichen universellen Gesetzen, wie die Verästelungen von Flüssigkeiten. Lichtenberg hatte seiner Zeit eine isolierende Harzplatte (heute würde man z.B. Hartgummi verwenden) mit feinem Pulver (z.B. Lycopodium) bestreut und auf eine geerdeten Metallplatte gelegt. Setzte er nun eine kurzzeitig aufgeladene Spitzenelektrode auf diesen Kuchen, so entstanden Staubfiguren, die den Witten- Sander- Dendriten täuschend ähnlich sind. Solche Strukturen lassen sich auch herstellen, wenn man die Entladung (im Dunkeln) auf der Schichtseite einer photographischen Platte ablaufen lässt. Eine moderne Variante einer Lichtenbergfigur ist die in Abb. 16 dargestellte Struktur, die durch Beschuß einer Plexiglasplatte mit energiereichen Elektronen entsteht (aus Brix 1985).

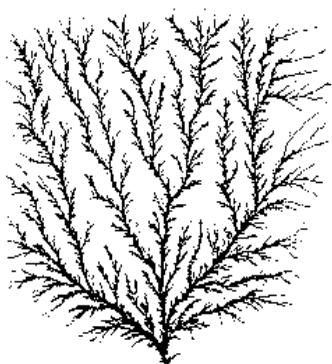


Bild 14: Moderne Variante einer Lichtenberg Figur.

kleine Stahlkugelchen (z.B. Kugellagerkugeln mit 1 bis 2 mm Durchmesser). Positioniert man über der Mitte des Schälchens eine "spitze" Elektrode, die auf ein Potential von 15 bis 20 kV gebracht wird, so bildet sich in kurzer Zeit eine baumartig verzweigte dendritische Struktur, die den Lichtenbergfiguren ähnlich ist.

Fraktale und Chaos

Das Geringste bewirkt das meiste, die Ordnung entsteht aus der Unordnung

Paul Valéry

Die bisherige Betrachtung der Fraktale beschränkte sich auf den räumlichen Aspekt von Strukturen. Bei der Beschreibung des Verhaltens physikalischer Systeme spielt jedoch die zeitliche Entwicklung, d.h. der Verlauf von Trajektorien, eine zentrale Rolle. Es hat sich gezeigt, daß auch zur Charakterisierung des zeitlichen Verhaltens dynamischer Systeme die fraktale Geometrie der Natur von großer Erschließungsmächtigkeit ist, und zwar vor allem dann, wenn es - wie wir es im Räumlichen gesehen haben- um die Beschreibung von anscheinend ungeordneten, mit den klassischen Mitteln nicht zu handhabenden Vorgängen geht. In diesem Sinne ungeordnet sind die seit einigen Jahren mit zunehmender Intensität untersuchten chaotischen Systeme. Es handelt sich dabei um Systeme, deren Verhalten zwar durch Differentialgleichungen beschrieben werden kann, die aber eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen zeigen mit der Konsequenz, daß beliebig kleine Abweichungen sich nach kurzer Zeit zu beliebig großen Wirkungen auswachsen. Einzelne Bahnen, Trajektorien, solcher Systeme sind daher praktisch nicht vorhersagbar. Verschafft man sich jedoch einen Überblick über die Gesamtheit der Verhaltensmöglichkeiten des Systems, indem man alle möglichen Trajektorien im Zustandsraum auf einmal betrachtet, so ergibt sich rein geometrisch- anschaulich ein kompaktes Gebilde von charakteristischer Struktur. Ein solcher chaotischer Attraktor kann daher als das topologische Äquivalent des Gesamtverhaltens des Systems angesehen werden. Er bringt zum Ausdruck, daß trotz der lokalen Unvorhersagbarkeit das Systemverhalten global vorhersagbar ist. Nähere Informationen über die Verhaltensweise des an sich chaotischen Systems ergeben sich aus der Analyse dieses Attraktors.

Das haben wir weiter oben am Beispiel eines chaotischen Drehpendels (Pohlsches Rad) dargestellt.. Der Attraktor dieses angetriebenen Pendels offenbart sich als wollknäuelartiges Gebilde von höchster Komplexität. Die Komplexität läßt sich dadurch reduzieren, daß man das Systemverhalten "stroboskopiert", d.h. im Rhythmus des periodischen Antriebs nur zu einem bestimmten Phasenwert der Anregung betrachtet. Vergleicht man solche stroboskopierten Schnitte (Poincare - Schnitte) des Attraktors für verschiedene Werte der Anregungsphase, so offenbaren die Veränderungen zeitlich aufeinanderfolgender Attraktoren den für die Entstehung von "Chaos" typischen Mischmechanismus, durch den die Trajektorien wie beim Rühren von Farben durcheinander gewirbelt werden.

Durch das Mischen werden Trajektorien der unterschiedlichsten Startpunkte im Rhythmus des Antriebs aneinandergefaltet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung kommt es dabei zu keiner Verschmelzung sondern zur Ausbildung einer infinitesimal feinen Blätterteigstruktur: Unendlich viele Schichten werden in einem endlichen Volumen zusammengepreßt. Damit stellt sich uns der chaotische Attraktor als ein hybrides Objekt zwischen Fläche und Linie dar, also als Fraktal. Die Selbstähnlichkeit bzw. Skaleninvarianz offenbart sich darin, daß jede Ausschnittsvergrößerung des chaotischen Attraktors dieselbe Struktur aufweist.

Die fraktale Dimension des Attraktors ist übrigens eine der wichtigsten Größen zur quantitativen Charakterisierung des Chaos in einem dynamischen System. Es scheint so, als lieferte die Mathematik der Fraktale überhaupt erst die adäquate "Sprache" zur Beschreibung chaotischer Systeme.

Die Bedeutung der fraktalen Geometrie zeigt sich auch beim Übergang eines komplexen Systems vom regulären zum chaotischen Verhalten. Wie in Abbildung 18 zu erkennen ist, geht im vorliegenden System die reguläre Schwingung mit konstanter Amplitude bei kontinuierlicher Variation eines für das System wesentlichen Kontrollparameters (hier: die Dämpfung des Pendels) zunächst in eine Schwingung mit zwei verschiedenen Amplituden über. Bald darauf spalten diese ihrerseits in zwei verschiedene Amplituden auf, die dann erneut aufspalten usw. in immer kürzeren Abständen bis sich schließlich unendlich viele Amplituden einstellen und ein sog. chaotisches Band bilden. Die chaotischen Bänder werden immer wieder von Fenstern geordneten Verhaltens unterbrochen. Die in den Fenstern vorhandenen regulären Linien entwickeln sich aber ihrerseits über ein Bifurkationsdiagramm ins Chaos, das wieder reguläre Fenster aufweist usw. Durch Ausschnittsvergrößerungen kann man demonstrieren, wie sich dieselbe Struktur kaskadenartig wiederholt (kleine Bilder in Abb. 18). Hier manifestiert sich erneut die für Fraktale typische Selbstähnlichkeit. Der nach einem seiner Entdecker, Mitchel Feigenbaum, so genannte Feigenbaum zeigt auch rein äußerlich die für viele Fraktale typische Baumstruktur, obwohl es im vorliegenden Fall nicht um eine Darstellung räumlicher sondern zeitlicher Verhaltensweisen geht.

Nichtlinearität und Rekursion

Es gibt geistige Räume, welche diese Welt nicht nur bedeuten, sondern in einem höheren Sinne diese Welt sind

Gertrud von Le Fort

Fraktale sind durch unendliche Vielfalt unauflösbar ineinander verschachtelter Muster, unvorhersagbarer räumlicher und zeitlicher Strukturen, kurzum: durch Komplexität gekennzeichnet. Ordnung und Chaos erscheinen als komplementäre Aspekte einer kreativen Welt des Werdens. Die mit dem Übergang zur fraktalen Geometrie verbundene Revolution des physikalischen Denkens ist eng mit der Überwindung der Herrschaft der geraden Linie verbunden. Nichtlineare Zusammenhänge kennzeichnen die Tiefenstruktur der Komplexität.

Linear: einfach und berechenbar

Indem sich die klassische Physik weitgehend auf lineare und reversible Vorgänge beschränkt, gelingt es ihr, die Welt auf ein Maß zu reduzieren, das eine quantitative, mathematisch einfache Beschreibung ermöglicht. Dabei wird die Dynamik eines physikalischen Systems typischerweise durch Differentialgleichungen beschrieben und durch deren Lösung explizit gemacht. Die Tatsache, daß das Auffinden der Lösung bei linearen Differentialgleichungen sehr einfach ist, dürfte nicht unwesentlich zum Erfolg der klassischen Physik beigetragen haben: Die allgemeine Lösung ergibt sich einfach aus der Summe zweier spezieller Lösungen. Hierin manifestiert sich das für das klassische Naturverständnis typische Überlagerungsprinzip, wonach ein komplexer Vorgang aus der Summe einfacher Vorgänge zusammengesetzt werden kann. Daher hat man mit der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung die gesamte Entwicklung des Systems auf einmal in der Hand, vorausgesetzt nur, man kennt dessen gegenwärtigen Zustand mit hinreichender Genauigkeit. Überraschungen sind daher ausgeschlossen: "Die Herrschaft über den Augenblick ist die Herrschaft über das Leben" (Marie von Ebner- Eschenbach).

Der Erfolg der klassischen Physik zeigt uns, daß die Natur sich tatsächlich in vielen Fällen so verhält, wie in den Berechnungen unterstellt wird. Man denke nur an die Voraussagen von Sonnen- und Mondfinsternissen und an die erfolgreiche Landung von Menschen auf dem Mond.

Nichtlinear: selbstorganisiert und "unberechenbar"

Andererseits gab es schon Lichtenberg zu denken, daß man zwar die "Durchgänge der Venus voraussagen (kann), aber nicht die Witterung und ob heute in Petersburg die Sonne scheinen wird". Erst in unseren Tagen wird "anerkannt", daß es auch prinzipiell unberechenbare physikalische Vorgänge und Phänomene gibt. Im Rahmen der nichtlinearen Physik wird der Tatsache Rechnung getragen, daß durch die bislang so erfolgreiche Linearisierung in zahlreichen Fällen nicht nur unwichtige Details, sondern gerade jene Phänomene unterdrückt werden, deren Verständnis für die Bewältigung einer nicht zuletzt durch die naturwissenschaftlichen Technik veränderten Welt unerlässlich erscheinen. Zu diesen Phänomenen gehören vor allem die Entstehung und Aufrechterhaltung von Strukturen, die meist unter den Begriffen Selbstorganisation und Chaos subsummiert werden. Typische Beispiele sind

- regelmäßig Muster am Wolkenhimmel oder auf dem Milchkaffee,
- das Umkippen eines Ökosystems,
- räumlich und zeitlich oszillierende chemische Reaktionen,
- Muster strömender Flüssigkeiten und Gase,
- das Wachstum von biologischen Strukturen.

Entscheidend für die kreative, strukturbildende und strukturverändernde Potenz nichtlinearer Systeme sind die dem linearen Ursache - Wirkungsdenken abgehenden Eigenschaften,

- "daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen" können (Poincaré 1957) (Sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen) und
- daß die das System bestimmenden Größen sich gegenseitig zu steuern vermögen (Rückkopplung).

Dadurch wird es dem nichtlinearen System möglich, ständig Kontrolle über seine internen Verhaltensmöglichkeiten zu behalten, auf Störungen flexibel zu reagieren und damit eine dynamische Stabilität in einer durch

zufällige Veränderungen geprägten Welt zu bewahren. Das Systemverhalten ist im einzelnen nicht mehr vorhersagbar.

Die die Systemdynamik erfassenden nichtlinearen Differentialgleichungen besitzen zwar auch eindeutige Lösungen. Aber im Unterschied zu linearen Systemen ergibt die Summe zweier spezieller Lösungen keine neue Lösung. Das Überlagerungsprinzip funktioniert nicht mehr. Komplexe Systeme lassen sich daher nicht mehr in voneinander unabhängige Teilsysteme zerlegen: Das Ganze ist mehr als die Summe der Teile (Aristoteles). Statt also wie im linearen Fall, den Systemzustand zu einem gewünschten Zeitpunkt durch Einsetzen der Anfangsbedingungen in die Lösungsfunktion aus der Menge aller möglichen Lösungen auszusondern, erreicht man im nichtlinearen Fall sein Ziel in der Regel nur dadurch, daß man sich vom Anfangszustand ausgehend Schritt für Schritt von einem Zustand zum nächsten vortastet: Der Zustand eines nichtlinearen Systems hängt vom unmittelbar vorausgehenden ab.

Nichtlinear: rekursiv

Die dadurch nahegelegte Methode zur Lösung der Differentialgleichung ist die Rekursion: Vom gegebenen Anfangszustand beginnend berechnet man mit Hilfe einer möglichst einfachen Vorschrift näherungsweise den benachbarten Zustand, den man nunmehr als Ausgangspunkt nimmt zur Berechnung des nächsten Zustands mit derselben Vorschrift. Durch genügend häufige Wiederholung dieser Vorschrift vollzieht man gewissermaßen den durch die Differentialgleichungen beschriebenen Prozeß nach.

Dieses Vorgehen hat zur Konsequenz, daß sich die Lösung nur durch eine im Idealfall unendliche Sequenz von Punkten, bzw. geometrisch ausgedrückt, durch eine Struktur manifestiert, in der die schlichte Wiederholung einer einfachen Vorschrift in einem selbstähnlichen Grundmuster reflektiert wird.

Die Bedeutung der Rekursion ist natürlich nicht auf die Berechnung von Differentialgleichungen beschränkt. Sie wurde überhaupt erst dadurch anwendbar auf die Differentialgleichung, daß man diese in diskrete Differenzengleichungen zerlegte und auf diese Weise auf einen einfachen Algorithmus reduzierte. So gesehen ist die rekursive Lösung einer Differentialgleichung nur ein spezieller Fall, Strukturen zu generieren. Damit wird der Zusammenhang deutlich zwischen den rekursiv erzeugten räumlichen Mustern, wie wir sie im ersten Teil dieser Arbeit beschrieben haben, und den "zeitlichen Mustern", wie sie am Beispiel des chaotischen Drehpendels demonstriert wurden, deutlich. In beiden Fällen wird eine nichtlineare Regel beliebig oft auf ein Grundelement angewandt und führt zu komplexen Gebilden, die in vielen Fällen Teilbereiche der realen Welt besser zu modellieren vermögen als die der klassischen Physik zugrundeliegenden statischen, linearen Strukturen der euklidischen Geometrie und linearen Algebra.

Litaratur

Anaxagoras: z.n. Capelle, W: Die Vorsokratiker. Stuttgart: Kröner 1968, S.267.

Backhaus, U., Schlichting, H. J.: Auf der Suche nach Ordnung im Chaos. MNU 43/5 (1990).

Barnsley, M.: Fractal modelling of real world images. In: Peitgen, H.O, Saupe, D.: The Science of Fractal images. Berlin etc.: Springer 1988, S.223. Barnsley, M.: Fractals everywhere. Boston: Academic Press 1988.

Brix, P.: G.C. Lichtenberg, der Physiker: Altes und Neues. Phys.BI.41(1985). Fricke, J.: Fraktale Systeme. Physik in unserer Zeit 17 (1986)151.

Galilei, G.: Saggiatore 1623

Hundertwasser, F.: zit.n: Mathey, F.J: Hundertwasser. München: Südwest 1985.

Kleiber, M.: Der Energiehaushalt von Mensch und Haustier. Hamburg Paul Parey 1967,S.157f.

Leibniz: Die Hauptwerke. Leibzig: Kröner 1933, S. 150f.

Lichtenberg, G. C.: Schriften und Briefe III. München: Hanser 1972, S.24ff. Die übrigen Lichtenberg- Zitate wurden den Sudelbüchern entnommen.

Mandelbrot, B.: How long is the coast of Britain? Science 155 (1967), 636-638.

Mandelbrot, B.: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel etc.: Birkhäuser 1987. Monikova, L.: Die Fassade. München: Hanser 1987, S.204.

Nordmeier, V.: Fraktale in der Physik. Osnabrück 1989, unveröffentlicht.

Poincaré, H.: Wissenschaft und Methode. Darmstadt: Wiss.Buchgesellschaft 1973

Prusinkiewicz, P.: Graphical applications of L- systems. Proc. of Graphics Interface (1986) - Vision Interface(1986), S.247- 253.

Schlichting, H.J.: Unsere Welt ist nichtlinear. In: Wiebel, K.(Hg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie. Alsbach: Leuchtturm 1991, S. 70 - 86: ders.: Strukturen im Chaos- Einfache Systeme als Zugang zu einem neuen Forschungsbereich der modernen Physik. *physica didactica*18/1 (1991), S.14 - 44.

Sernetz, M., Gelleri, B., Hofmann, J.: The Organism as Bioreactor. Interpretation of the Reduction Law of Metabolism in terms of Heterogeneous Catalysis and Fractal Structure. *J. Theor. Biol.* 117 (1985) 209-230.

Swift, J.: Gullivers Reisen 1726

Witten,T.A.; Sander, L.M.:Diffusion-limited Aggregation. *Phys. Rev. B* 27(1983) 5686