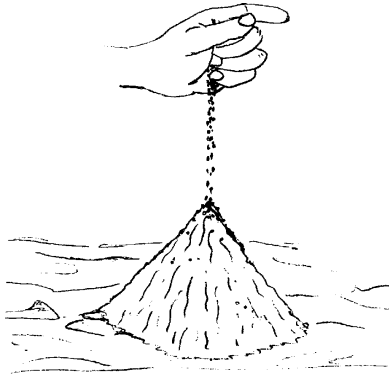


Ein Sandhaufen mit Erinnerung - Experimentelle Untersuchungen zur Selbstorganisierten Kritikalität -

Volkhard Nordmeier, H. Joachim Schlichting • Universität GHS Essen



Der Stein

*Ein kleines Steinchen rollte munter
von einem hohen Berg herunter.*

*Und als es durch den Schnee so rollte,
ward es viel größer als es wollte.*

*Da sprach der Stein mit stolzer Miene:
„Jetzt bin ich eine Schneelawine.“*

*Er riß im Rollen noch ein Haus
und sieben große Bäume aus.*

*Dann rollte er ins Meer hinein
und dort versank der kleine Stein.*

Joachim Ringelnatz

Als ein Paradigma für sich selbst organisierende kritische Phänomene hat sich seit einigen Jahren die Theorie der *selbstorganisierten Kritikalität* (SOK) (vgl. [1], [2]) in der nichtlinearen Physik etabliert.

Nach dieser Theorie entwickeln sich viele Systeme unabhängig von ihrem Anfangszustand 'von selbst' zu einem kritischen stationären Zustand hin. Obwohl sich hier schon kleinste Störungen über alle Größenordnungen hinweg bemerkbar machen können, finden diese Systeme stets von selbst in den kritischen Zustand zurück.

Ein bekanntes, auch mit Mitteln der Schulphysik erforschbares System stellt beispielsweise der Sandhaufen dar: Je größer er wird, um so steiler werden seine Seiten, jedoch nur so lange, bis die Neigung einen kritischen Wert annimmt, der trotz weiterer Sandzufuhr beibehalten wird.

Im folgenden werden experimentelle Arbeiten zu diesem Themengebiet vorgestellt, die die typische Dynamik eines Sandhaufens beschreiben und zudem Aufschlüsse über die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten der SOK geben.

Selbstorganisierte kritische Sandhaufen - Strukturbildung durch Lawinen

Läßt man trockenen, feinkörnigen Sand oder ein ähnliches Granulat auf einen Sandhaufen bzw. Schütthaufen rieseln, so nimmt er schließlich seine typisch kegelförmige Gestalt an. Durch gelegentliches Abrutschen von Teilchen am Abhang des Haufens wird fortan ein im Mittel konstanter Böschungswinkel eingeregelt.

Welche Mechanismen liegen diesem selbstorganisierten Verhalten zugrunde ?

Schaut man sich die von oben auf die Spitze des Haufens fallenden Sandkörner etwas genauer an, so stellt man fest: Sobald der kritische Böschungswinkel erreicht ist, kann die Zufuhr weiterer Sandkörner auch lawinenartige Sandstürze auslösen, die dann die Höhe des Haufens bzw. seine Neigung verringern. Liegt der Böschungswinkel über dem kritischen Wert, entsteht eine instabile Lage, in der sehr leicht Lawinen abgehen, die die Nei-

gung so weit vermindern, daß sie wieder auf den kritischen Wert zurückfällt oder sogar unterkritisch wird. Ein unterkritischer Zustand erweist sich i.a. als sehr stabil gegenüber Störungen. Bei weiterer Zufuhr von Teilchen findet das System allerdings immer wieder in den kritischen 'stationären' Zustand zurück - der Sandhaufen wird gleichsam von dem kritischen Böschungswinkel 'angezogen', ohne daß es irgendeiner besonderen externen Regulierung bedarf.

Experimentelle Untersuchungen - Ein Sandhaufen im Labor

Zur experimentellen Erfassung der Lawinen-Dynamik eines 'berieselten' Sandhaufens finden sich in der Literatur verschiedene Vorschläge (vgl. [3]- [6]). Während der eigentliche Meßvorgang bei allen vorgestellten Experimenten per computerauslesbarer elektronischer Waage geschieht (üblicherweise wird die Größe einer Lawine an der Zahl bzw. Masse der abgehenden Sandkörner gemessen), erweist sich allerdings die (konstante) Zufuhr von Sandkörnern als recht schwierig. Da die vorgestellten Lösungen einen sehr hohen technischen und feinmechanischen Einsatz erfordern, wollen wir im folgenden einen Versuchsaufbau vorstellen, der bereits mit sehr einfachen Mitteln realisiert werden kann (vgl. Abb.1).

Die Zufuhr der Sandkörner erfolgt hier über ein kleines Förderband (z.B. ein umgestülpter Zahnriemen aus dem Bereich des Modelbauszubehörs, Transportlänge ca. 5 - 10 cm), das mit Hilfe eines kleinen Motors angetrieben wird. Zur Automatisierung der Berieselung wird der Sand allerdings erst in einen ausreichend großen Blechbehälter¹ (mind. 1 Liter) eingefüllt. Dieser dient als Sandreservoir, von dem aus der Sand zunächst noch relativ ungleichmäßig aus einer am unteren Ende des Behälters angebrachten 'Auslauföffnung' (Durchmesser ca. 0.5 - 1 cm) auf das Förderband rieselt (vgl. Abb.1).

Am Ende des Bandes fallen die Sandkörner dann durch einen kleinen Trichter, der den Teilchenstrom fokussiert, auf den Sandhaufen.

Erstaunlicherweise liefert ein derartiges Förderband sehr konstante 'Fördermengen': Der pro Zeiteinheit nahezu linear zunehmende Massengehalt eines derartig befüllten Testgefäßes zeigt dies deutlich (vgl. Abb.2).

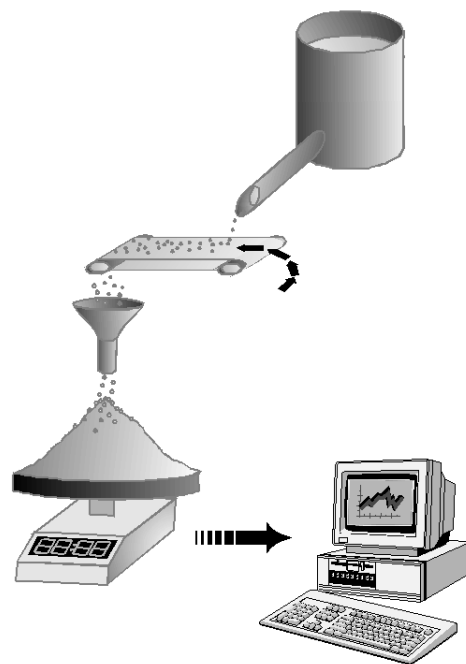


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaues mit Meßwertaufnahme per Computer.

¹ Kunststoff oder Plexiglas hat sich hier als ungeeignet erwiesen, da sich Sand beim 'Rieseln' sehr stark elektrostatisch aufladen kann. Die Rieseigenschaften ändern sich dann bisweilen so stark, daß der Sand in langen Ketten oder Klumpen zusammenhaftet. Bei der Verwendung von Metallbehältern kann man durch Erdung der Komponenten dafür sorgen, daß die Ladung kontinuierlich abgeführt wird. Ohne Erdung lassen sich regelrechte Funkenübersprünge beobachten, die den Experimentator in (schmerzhaftes) Staunen versetzen können.

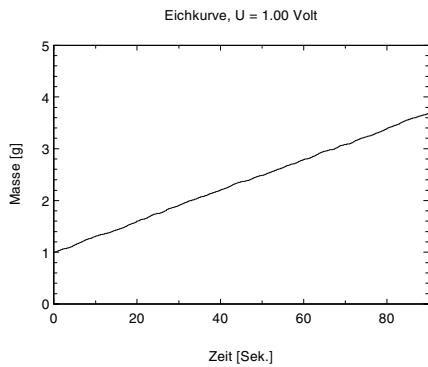


Abbildung 2: Eichkurve, $U_{\text{Motor}}=1.0$ Volt.

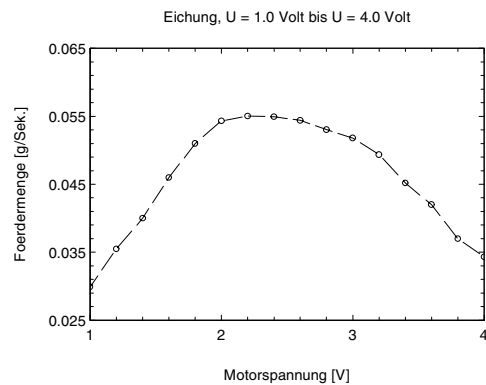


Abbildung 3: Eichkurve Fördermenge, $U_{\text{motor}}=1.0$ V bis $U_{\text{motor}}=4.0$ V.

Mittels der am Fördermotor angelegten Spannung läßt sich die Fördermenge variieren. Sie wächst allerdings nicht kontinuierlich mit größerer Motorspannung an, sondern nimmt bei höheren Drehzahlen wieder ab (vgl. Abb.3). Vermutlich werden dann die Sandkörner aufgrund der stärkeren Vibrationen des Motors vom Förderband wieder heruntergeschüttelt. Ein wesentlicher Faktor für die Güte der Berieselung stellt allerdings auch die Art und Qualität des verwendeten Sandes dar: Ein Großteil der beispielsweise im Baumarkt oder direkt beim Bauhandel erhältlichen Sandsorten enthält ihrer Verwendung entsprechend sehr viele ‘Verunreinigungen’, die die gegenseitigen Wechselwirkungen und damit die Rieseigenschaften der ‘reinen’ Sandkörner beeinflussen. Reiner Quarzsand oder besser noch gereinigter Vogelsand (Streumittel für Vogelkäfige u.ä.) hat sich für diesen Versuch als besonders geeignet erwiesen: Durch einfaches Sieben erhält man aus diesem Produkt sehr feinen, reinen und gut rieselnden Sand mit relativ homogener ‘Korngröße’.

Lawinen eines Sandhaufens

Der auf diese Art und Weise berieselte Sandhaufen befindet sich auf einer kreisförmigen Scheibe (Durchmesser ca. 6-10 cm).

Die Gesamtmasse wird nun mit Hilfe einer elektronischen Waage (Typ: SARTORIUS, Auflösung: 1 mg) registriert und dann per integrierter serieller Schnittstelle als Meßwert direkt an einen PC übermittelt (vgl. [7]).

Die aufgezeichneten Massenänderungen geben dann Aufschluß über die Lawinentätigkeit: Verlassen bei einem Sandsturz Sandkörner mehr oder weniger lawinenartig den Haufen, so ist in der Meßkurve ein jähes Absinken der Gesamtmasse zu verzeichnen.

Die ersten Versuchsreihen überraschten uns allerdings: Zunächst beobachteten wir ein fast periodisch oszillierendes Lawinenverhalten (vgl. Abb. 4). In nahezu konstan-

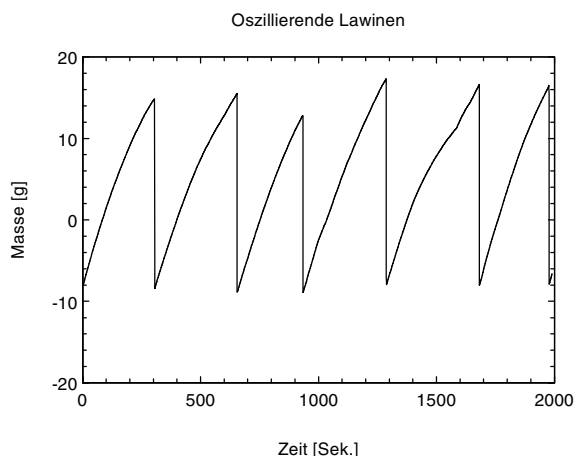


Abbildung 4: Oszillierende Lawinen.

ten Zeitabständen wuchs die Gesamtmasse des Sandhaufens bis zu einem kritischen Grenzwert, um dann unter nahezu gleich großen Lawinenabgängen (bis zu 30 g) wieder einen stark unterkritischen Wert anzunehmen.

Schon einen Tag später zeigte derselbe Sandhaufen (ohne Änderung der Parameter wie Fördermenge etc.) bei erneuter Berieselung ein gänzlich anderes Verhalten: Trotz weiterer Zufuhr von Sandkörnern wies der Haufen zunächst eine Art Sättigungsverhalten auf, begann dann durch 'Abwerfen' kleinster Lawinen leicht zu oszillieren und gelangte jedesmal ganz plötzlich durch einen mittelgroßen Sandsturz in einen unterkritischen Zustand (siehe Abb. 5). Diese Art der Dynamik erinnert sehr stark an Relaxations-Oszillationen, wie sie beispielsweise beim Tropfverhalten von Flüssigkeiten beobachtet werden können.

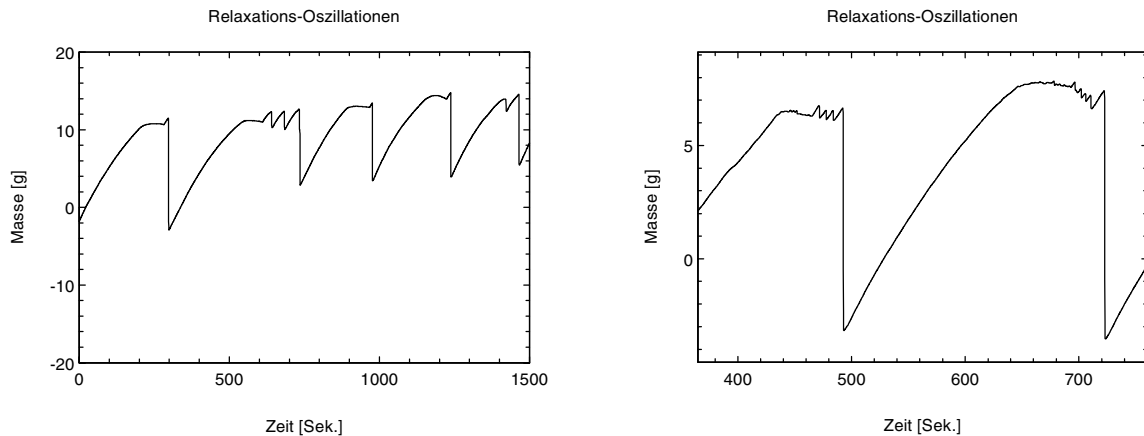


Abbildung 5: Relaxations-Oszillationen von Sandlawinen.

Auf den ersten Blick scheinen diese Versuchsergebnisse dem (theoretisch) erwarteten Systemverhalten - Selbstorganisation durch Abgang von Lawinen aller Größenordnungen - zu widersprechen. Wir erklären uns diese nahezu periodischen Oszillationen wie folgt: Da selbst trocken aussehender Sand eine gewisse Feuchtigkeit enthält, besteht eine zwar geringe, aber (wie sich hier zeigt) wirkungsvolle Wechselwirkung zwischen den Sandteilchen: Sie 'backen' bis zu einem gewissen Grade zusammen. So entsteht vermutlich ein stark überkritischer Sandhaufen, der sogar ein Sättigungsverhalten zeigen kann (s.o.). Bei weiterer Zufuhr von Sand kommt es allerdings irgendwann zu einer so stark überkritischen Situation (die zuweilen lokal noch durch Abrutschen kleinster Lawinen aufrechterhalten werden kann - vgl. Abb. 5), daß der Haufen schließlich durch den Abgang einer großen Lawine unterkritisch wird. Aufgrund der Massenträgheit (und vermutlich auch aufgrund von Reibungseffekten) verläßt bei derart großen Lawinen 'zuviel' Sand den Haufen, so daß die Böschung stark unterkritisch wird. Diese übergroßen Sandstürze lassen sich auch direkt an der Gestaltänderung des Sandhaufens beobachten bzw. ablesen, die Böschung ändert ihr typisch sandhaufenartiges, kegelförmiges Aussehen und bekommt dann eine stark konkave Form. Der Haufen hat sich 'entspannt', und es dauert seine Zeit, bis er wieder einen kritischen oder in diesem Fall einen überkritischen Zustand erreicht hat.

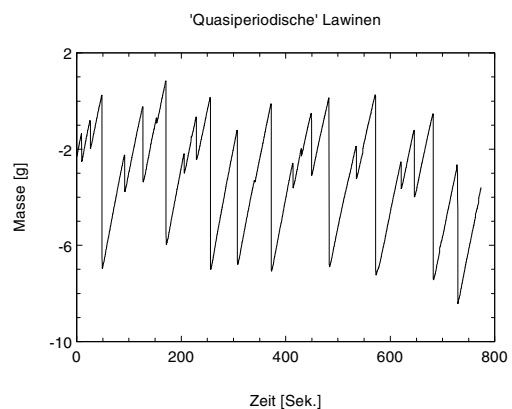


Abbildung 6: 'Quasiperiodische', zyklische Lawinendynamik.

Lawinen aller Größenordnungen

Die Abhängigkeit des Rieselverhaltens von der Luftfeuchtigkeit zeigt deutlich die einige Tage später aufgezeichnete Meßreihe am selben Sandhaufen (vgl. Abb. 6): Bei trockenerer Luft war ein zwar unregelmäßiges, aber dennoch fast periodisches Lawinenverhalten zu beobachten. Die aufgenommene Meßkurve weist auf ein stark 'quasi-periodisches', zyklisches Systemverhalten hin. Derartig zyklische Bewegungsmuster sind in der nichtlinearen Physik in ähnlicher Form als vorchaotische Bewegungsmuster deterministischer chaotischer Systeme bekannt (vgl. Abb. 6).

Die im Sand gebundene bzw. in der Luft enthaltene Feuchtigkeit stellt somit einen nicht vernachlässigbaren Kontrollparameter für die Sandhaufendynamik dar. Zur Untersuchung 'idealer' Sandhaufen ist es daher notwendig, den Sand zur Optimierung der Rieseigenschaften durch kurzes Erhitzen (z.B. im Kochtopf) zu trocknen.

Die folgenden Versuchsreihen (Abb. 7) zeigen deutlich: Bei trockenem Sand rutschen sowohl sehr kleine als auch sehr große Lawinen in sehr unterschiedlichen zeitliche Abständen vom Sandhaufen ab. Das Systemverhalten ähnelt jetzt einer (schwach) chaotischen Abfolge von kleinen und großen Ereignissen.

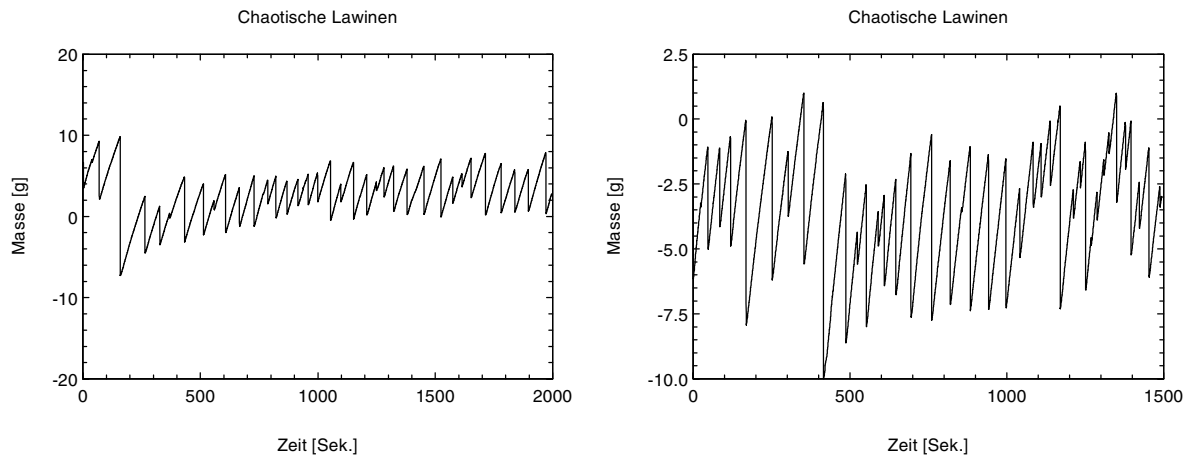


Abbildung 7: Chaotische Lawinen aller Größenordnungen.

Zur Aus- und Bewertung der einzelnen Meßergebnisse wäre es daher notwendig, nach dem Erhitzen die 'Güte' des Sandes bzw. den Grad an Restfeuchtigkeit zu bestimmen. Da dies auf einfachem Wege nicht möglich ist, betrachten wir zunächst einmal den eigentlichen 'Stoffumsatz' eines berieselten Sandhaufens (vgl. Tabelle 1). Dazu mißt man (numerisch) nach jedem Abgang einer Lawine den (durchschnittlichen) Massenanstieg des 'wachsenden' Sandhaufens. Verglichen mit der durchschnittlichen Fördermenge ergeben sich für die verschiedenen Arten der Lawinendynamik verschiedene Stoffumsätze: Bei den periodisch oszillierenden Lawinen bleiben über 40% der zugeführten Sandkörner nicht auf dem Haufen liegen, sondern rutschen direkt herunter (vermutlich kommt es hier schon während des Rieselns zu Agglomerationen - diese 'Sandklumpen' bleiben gar nicht erst am Haufen haften, sondern rollen sofort am Hang herunter). Je größer der Stoffumsatz wird, desto eher können wir hier von einer idealen Sandhaufendynamik sprechen. (Allerdings kommt erschwerend hinzu, daß die Meßgenauigkeit des Waage es nicht zuläßt, einzelne Sandkörner zu registrieren.) Für die folgenden Betrachtungen wurden daher nur Messungen ausgewertet, bei denen der Sand nach dem Trocken einen Stoffumsatz von mehr als (ca.) 95% zeigte.

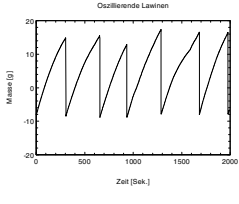
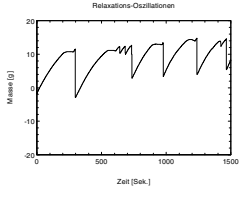
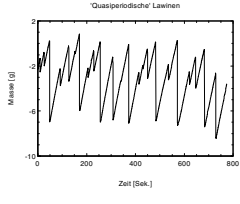
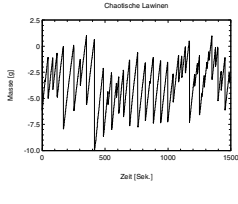
Art	periodisch	relaxierend	quasiperiodisch	chaotisch
Lawinen				
Anstieg	0.069 g/sek.	0.078 g/sek.	0.105 g/sek.	0.113 g/sek.
Stoffumsatz	59 %	68 %	90 %	97 %

Tabelle 1: Lawinen im Vergleich (Fördermenge: 0.117 g/sek.)

Lawinenverteilung und Potenzgesetz

Betrachtet man die chaotische Lawinenkurve eines idealen Sandhaufens, so fällt auf, daß Lawinen in (fast) allen Größenordnungen auftreten. Um dies näher zu untersuchen, betrachten wir im folgenden nur die Größe der einzelnen Lawinen (vgl. Abb. 8) bzw. die Häufigkeit $H(M)$, mit der Lawinen der Masse M abrutschen. Bei doppelt-logarithmischer Auftragung erkennt man (vgl. Abb.9), daß die Häufigkeitsverteilung über nahezu zwei Größenordnungen hinweg einem Potenz-Gesetz gehorcht ($H(M) \sim 1/M^2$), es treten exponentiell weniger 'große' als 'kleine' Ereignisse bzw. Fluktuationen auf. (Die kleineren Lawinen scheinen hier allerdings gleichverteilt zu

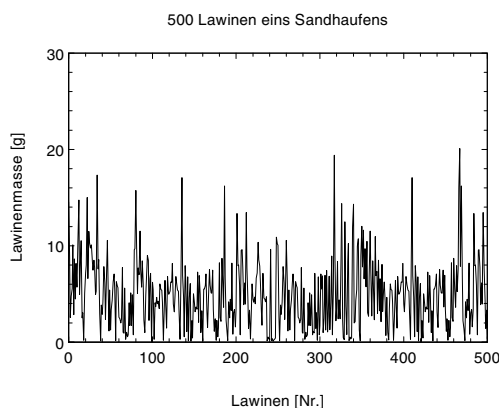


Abbildung 8: 500 Lawinen eines Sandhaufens.

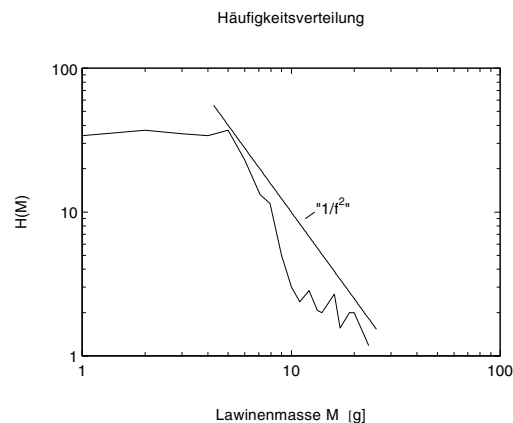


Abbildung 9: Doppelt-logarithmische Darstellung der Häufigkeitsverteilung von Sandlawinen.

Das System 'Sandhaufen' weist also keine charakteristische Lawinengröße auf. Im kritischen Zustand können sich kleinste Störungen über alle Größenordnungen hinweg bemerkbar machen: Zwar sind Ereignisse geringerer Reichweite bevorzugt, aber jedes fallende Sandkörnchen kann eine Lawine (fast) jeder (hier möglichen) Größenordnung auslösen.

Uns geht es hier nicht nur um die Erforschung von Sandlawinen: Als einfaches, mit schulischen Mitteln zugängliches System (siehe auch [7]), kann der Sandhaufen als Modell für viele andere Systeme stehen, die sich (unabhängig vom Anfangszustand) 'von selbst' in einen stationären, aber kritischen Gleichgewichtszustand entwickeln. Genannt seien beispielsweise Domänenwachstum in ferromagnetischen Stoffen, Erdbeben im Hochgebirge,

Erdbeben, Ausbreitung von Waldbränden, Leitfähigkeitsänderungen in Halbleitern u.v.m. Die Theorie der SOK bietet zudem eine fundamentale Erklärungsmöglichkeit für Phänomene mit potenzgesetzartigem Verhalten (sog. 1/f-Rauschen), wo Kettenreaktionen aller Größenordnungen und Zeitdauer auftreten.

Literatur

- [1] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld: Self-organized Criticality (...). In: Phys. Rev. Let., 4/59 (1987) 381; und: Phys. Rev. A, 1/38 (1988) 364.
- [2] H.J. Schlichting, V. Nordmeier: Wie gesetzmäßig verhalten sich unvorhersehbare Ereignisse. In: Physik in der Schule, 10/34 (1996).
- [3] G.A. Held, et al.: Experimental Study of Critical-Mass Fluctuations in an Evolving Sandpile. In: Phys. Rev. Let., 9/65 (1990) 1120.
- [4] Vidar Frette, et.al.: Avalanche dynamics in a pile of rice. In: Nature, 379 (1996) 49.
- [5] H.M. Jaeger, et.al.: Relaxation at the Angle of Repose. In: Phys. Rev. Let., 1/62 (1989) 40.
- [6] S.K. Grumbacher, et.al.: Self-organized criticality: An experiment with sandpiles. In: Am. J. Phys., 4/61 (1993) 329.
- [7] F. Wörten: Die elektronische Waage - eine Bereicherung für den Physikunterricht. In: W. B. Schneider (Hrsg.): Wege in der Physikdidaktik, Bd.3, Palm&Enke, Erlangen, 1993.